

ÜBER ENDLICHE GRUPPEN MIT AUTOMORPHISMEN,
DEREN FIXPUNKTGRUPPEN BESCHRÄNKT SIND

von
Thomas Meixner
aus
Lichtenfels

1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546211_0020

ÜBER ENDLICHE GRUPPEN MIT AUTOMORPHISMEN, DEREN FIXPUNKTGRUPPEN BESCHRÄNKT SIND

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von

Thomas Meixner

aus
Lichtenfels

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

28. 11. 1979

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter:

Professor Dr. H. Kurzweil

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. K. Strambach

Inhalt

Vorwort	(i)
Anmerkungen, Bezeichnungsweise	(vi)
§ 1 Präliminarien	1
§ 2 Fixpunktfreie Automorphismen	13
§ 3 Involutorische Automorphismen	40
§ 4 Automorphismen von Primzahlordnung, allgemeiner Fall	59
§ 5 Automorphismengruppen vom Typ $(2,2)$	74
Literaturverzeichnis	93
Lebenslauf	

Vorwort

Eine sehr leicht nachprüfbare, aber nicht zu unterschätzende Eigenschaft eines Automorphismus α der endlichen Gruppe G ist die, fixpunktfrei auf G zu operieren. Für die Gruppe G nämlich kann es unter Umständen einschneidende Konsequenzen haben, einen solchen fixpunktfreien Automorphismus α zu besitzen. So muß zum Beispiel, wie bereits Burnside Anfang dieses Jahrhunderts wußte, G abelsch sein, wenn der fixpunktfreie Automorphismus α von G Ordnung 2 besitzt.

Mitte beziehungsweise Ende der 50-er Jahre dieses Jahrhunderts wurde in zwei Arbeiten ([9], [17]) deutlich, welcher Art diese Konsequenzen für die Gruppe G sind.

- (1) Graham Higman zeigte, daß die Nilpotenzklasse einer nilpotenten Gruppe, die einen fixpunktfreien Automorphismus von Primzahlordnung q besitzt, durch eine nur von der Primzahl q abhängende Zahl $k(q)$ beschränkt ist.
- (2) John Thompson bewies, daß endliche Gruppen, die einen fixpunktfreien Automorphismus von Primzahlordnung besitzen, nilpotent sind.

Solche Erfolge reizten natürlich zu untersuchen, welche Sätze man unter schwächeren Voraussetzungen erhalten könne.

Viele Mathematiker beschäftigten sich seither mit dem Problemkreis "Fixpunktfreie Automorphismengruppen endlicher Gruppen", der eine Verallgemeinerung der obigen Situation darstellt, wenn man statt des fixpunktfreien Automorphismus α die von ihm erzeugte, fixpunktfrei operierende Automorphismengruppe A betrachtet. Ziel ist nun, die Auflösbarkeit von G zu zeigen (analog zu (2)), und für auflösbare Gruppen G mit fixpunktfrei operierender Automorphismengruppe A nachzuweisen, daß die Fittinglänge von G durch eine nur von $|A|$ abhängende Zahl beschränkt ist (analog zu (1)). Besonders unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Ordnungen von A und G teilerfremd sind, waren einige Erfolge zu verzeichnen. Diese Voraussetzung war in (1) und (2) automatisch erfüllt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Voraussetzung der Fixpunktfreiheit des Automorphismus α von Primzahlordnung q der endlichen Gruppe G abzuschwächen, und statt der sehr starken Voraussetzung $C_G(\alpha) = 1$ andere Forderungen an $C_G(\alpha)$ zu stellen. So wurde zum Beispiel die Voraussetzung " $C_G(\alpha)$ ist eine zyklische Gruppe" untersucht, und M. Collins sowie B. Rickman entschlossen sich, den Fall $|C_G(\alpha)| = 2$ zu diskutieren ([2]). Für ungerades q konnten sie die Auflösbarkeit von G zeigen.

Den allgemeinen Fall $|C_G(\alpha)| = n$ zu betrachten, regte mich

B. Hartley 1977 an. Im Hinblick auf (1) und (2) fragte er:

Wie weit ist eine endliche Gruppe G mit einem Automorphismus α von Primzahlordnung q mit $|C_G(\alpha)| = n$ davon entfernt, nilpotent zu sein? Gibt es eine Funktion, die nur von n und q abhängt, $f(n, q)$, so daß eine nilpotente Untergruppe U in G gefunden werden kann, deren Index höchstens $f(n, q)$ beträgt?

Für endliche auflösbare Gruppen wird diese Frage in den Paragraphen 3 und 4 positiv beantwortet.

Wie weit ist eine endliche nilpotente Gruppe G mit einem Automorphismus α der Ordnung q , prim, und $|C_G(\alpha)| = n$ davon entfernt, Klasse $k'(q)$ zu besitzen? Gibt es eine Funktion $g(n, q)$ derart, daß in G eine Untergruppe U von Klasse kleiner gleich $k'(q)$ gefunden werden kann, deren Index in G durch $g(n, q)$ beschränkt ist?

Hierbei ist $k'(q)$ analog zu (1) eine Funktion von q , die allerdings noch näher zu bestimmen wäre. Wie Gegenbeispiele zeigen, kann nicht $k'(q) = k(q)$ gesetzt werden.

Eine vollständige Antwort auf diese Frage für $q = 2$ findet sich in Paragraph 3, eine teilweise Antwort für den allgemeinen Fall in Paragraph 4.

In gleicher Weise kann man auch versuchen zu zeigen, daß sich eine endliche Gruppe G , die eine Gruppe A von Automorphismen mit $|C_G(A)| = n$ zuläßt, nur "wenig" von Gruppen unterscheidet, die eine zu A isomorphe, fixpunktfreie Automorphismengruppe besitzen. Das "wenig" sollte dann von n und $|A|$ abhängen.

Nach Bauman ([4], 10.5.3) hat eine endliche auflösbare Gruppe G mit einer fixpunktfreien Automorphismengruppe, die isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist, höchstens Fittinglänge 2. Paragraph 5 behandelt die entsprechende Verallgemeinerung für "fast fixpunktfreie" Automorphismengruppen.

G. Higman konnte in [9] beweisen, daß eine Funktion $k(q)$ mit den Eigenschaften aus (1) existiert. Er gab eine untere Schranke für die Funktion $k(q)$ an, die sie vermutlich genau darstellt. Für die bekannten Werte von $k(q)$, also für die Primzahlen 2, 3, 5 und 7 trifft dies zumindest zu.

Kostrikin und Kreknin konnten in [11] und [12] die Funktion $k(q)$ nach oben abschätzen, ihre Schranke ist allerdings recht grob. In Paragraph 2 wird für metabelsche nilpotente Gruppen mit einem fixpunktfreien Automorphismus von Primzahlordnung q der genaue Wert der entsprechenden Funktion $\tilde{k}(q)$ bestimmt, und mit seiner Kenntnis das Kostrikin/Krekninsche Ergebnis numerisch verbessert.

Herrn Professor Hartley möchte ich an dieser Stelle herzlich für seine Anregungen, Vorschläge und Ermunterungen, für sein persönliches Interesse an dieser Arbeit danken. Satz 3.12ii' stammt von ihm, und auch die Formulierung von Satz 4.3 habe ich von ihm übernommen. In Zusammenarbeit mit ihm sind die beiden Manuskripte [7] und [8] entstanden. In ihnen wird die Situation der Paragraphen 3 und 4 noch allgemeiner abgehandelt. Wie Hartley zeigt, kann der allgemeine Fall auf den einer endlichen auflösbaren Gruppe zurückgeführt werden.

Ich möchte jedoch auch nicht versäumen, Herrn Professor Norman Blackburn ganz herzlich für sein Interesse und seine Hilfsbereitschaft zu danken. Er gab mir in vielen Gesprächen Gelegenheit, Probleme zu diskutieren, und ermöglichte mir den Einblick in mehrere Paragraphen des noch nicht erschienenen Buches [1], was insbesondere für den Paragraphen 2 sehr hilfreich war.

Besonders herzlich aber danke ich Herrn Professor Dr. Hans Kurzweil. Er interessierte sich für das von Brian Hartley gestellte Thema und förderte das Entstehen der Arbeit durch viele kritische Anmerkungen. Für seine Anregungen, Verbesserungsvorschläge und Kommentare danke ich ihm aufrichtig.

Anmerkungen, Bezeichnungsweise

Alle in dieser Arbeit betrachteten Gruppen seien endlich. Ebenso mögen alle vorkommenden Ringe und Lie-Algebren stets nur endlich viele Elemente besitzen. Ringe sind, wenn nicht anders vermerkt, assoziativ, kommutativ und mit Eins. Produkte in Lie-Algebren werden als linksnormierte Klammernprodukte geschrieben, d.h. $[u, v, w] := [[u, v], w]$ für Elemente u, v , und w einer Lie-Algebra. Diese Schreibweise benutzen wir auch für die Kommutatorbildung in Gruppen. Dabei sind Mißverständnisse nicht zu befürchten, und der Übergang von einer nilpotenten Gruppe zu ihrem assoziierten Lie-Ring ist besonders einfach. Darin folge ich der Schreibweise in [1], Kapitel I. Zitate aus [1] stammen im übrigen stets aus diesem Kapitel, und sind durch Angabe von Paragraphen- und Satznummer ausreichend gekennzeichnet. Ergebnisse aus [4] und [10] werden mit Kapitel-, Paragraphen- und Satznummer angegeben, die Sätze aus [13] sind fortlaufend in jedem Kapitel durchnummeriert und somit durch Angabe von Kapitel- und Satznummer eindeutig gekennzeichnet.

Die Notation folgt der in [10] Benutzten. So sei insbesondere für Begriffe und Bezeichnungen, die Permutationsgruppen betreffen, auf [10], Kapitel I, Paragraph 5 verwiesen.

Sei G eine Gruppe.

Setze $K_1(G) := G$, und definiere $K_{n+1}(G) := [K_n(G), G]$ für alle $n \geq 1$. Dann heißt $K_2(G) = G'$ die Kommutatorgruppe, die Reihe $\{K_n(G)\}_{n \geq 1}$ die absteigende Zentralreihe von G . G heißt nilpotent, falls für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $K_{n+1}(G) = 1$. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt dann die Nilpotenzklasse der nilpotenten Gruppe G .

Setze $G^{(0)} := G$, und definiere $G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}]$ für alle $i \geq 0$. Dann ist $G^{(1)} = G'$ die Kommutatorgruppe von G , $G^{(2)} = G''$ die zweite Kommutatorgruppe, und die Reihe $\{G^{(i)}\}_{i \geq 0}$ die abgeleitete Reihe von G . G heißt auflösbar, falls für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt $G^{(i)} = 1$. Das kleinste i mit dieser Eigenschaft heißt dann die Auflösbarkeitslänge von G .

Setze $F_0(G) := 1$, und definiere $F_{i+1}(G)$ für $i \geq 0$ durch $F_{i+1}(G)/F_i(G) := F(G/F_i(G))$, wo $F_1(H) = F(H)$ die Fittinggruppe der Gruppe H , also ihren größten nilpotenten Normalteiler bezeichnet. Dann heißt die Reihe $\{F_i(G)\}_{i \geq 0}$ die aufsteigende Fittingreihe von G . Ist G auflösbar, so existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $F_i(G) = G$ gilt. Das kleinste i mit dieser Eigenschaft nennt man die Fittinglänge von G .

Seien $\pi, \mathfrak{p}$ Mengen von Primzahlen, π' und $\mathfrak{p}'$ die Mengen der Primzahlen, die nicht in π bzw. $\mathfrak{p}$ liegen.

Bezeichne mit $O_\pi(G)$ den größten Normalteiler von G , dessen Ordnung nur durch Primzahlen aus der Menge π teilbar ist. Dann definiere $O_{\pi\mathfrak{p}}(G)$ durch $O_{\pi\mathfrak{p}}(G)/O_\pi(G) := O_{\mathfrak{p}}(G/O_\pi(G))$. Für Primzahlmengen $\{p\}$ oder $\{p\}'$ lassen wir die Klammern weg. Dann heißt G eine p -Gruppe, falls $G = O_p(G)$, eine p' -Gruppe, falls $G = O_{p'}(G)$ gilt. Für $G = O_{p_1 \dots p_n}(G)$ heißt G p -abgeschlossen, für $G = O_{p_1' \dots p_n'}(G)$ heißt G p -nilpotent.

Sei G eine p -Gruppe. Dann werden für $i \geq 1$ definiert:

$$\Omega_i(G) := \langle x \in G \mid x^{p^i} = 1 \rangle, \quad \mathcal{U}_i(G) := \langle x^{p^i} \mid x \in G \rangle.$$

Dann heißt $\Omega_1(G) = \Omega(G)$ der Sockel von G , und falls G abelsch ist, ist $\mathcal{U}(G) = \mathcal{U}_1(G)$ gleich der Frattinigruppe $\Phi(G)$.

Die triviale Gruppe 1 wird im Folgenden sowohl als p -Gruppe, wie als p' -Gruppe für alle Primzahlen p aufgefaßt. Wir wollen sie jedoch nicht als zyklische Gruppe ansehen, d.h. werde eine zyklische Gruppe stets von einem nichttrivialen Element erzeugt.

Abschnitt der Gruppe G heißt eine Faktorgruppe H/K mit $H, K \trianglelefteq G$ und $K \trianglelefteq H$.

Elementarabelsch heißt eine p -Gruppe G , falls sie abelsch ist, und $G = \Omega(G)$ gilt. Für $|G| = p^n$ hat G dann den Typ $(\underbrace{p, \dots, p}_n)$. Ist G vom Typ $(2, 2)$, so heißt G eine Kleinsche Vierergruppe, $G \cong V_4$.

§ 1 Präliminarien

(1.1) Hilfssatz: Sei G eine auflösbare Gruppe, N ein Normalteiler von G . Dann gilt für alle $i \geq 1$:

$$F_i(G) \cap N = F_i(N)$$

Beweis: Für $i = 1$ ist die Aussage klar, denn $F(G) \cap N$ ist ein nilpotenter Normalteiler von N , liegt also in $F(N)$, und $F(N)$ ist nilpotent und ist da charakteristisch in N , normal in G , liegt also in $F(G)$.

Der Rest ist Induktion über i . Sei die Behauptung also für i bewiesen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_{i+1}(N)F_i(G)/F_i(G) &\cong F_{i+1}(N)/F_{i+1}(N) \cap F_i(G) = \\ F_{i+1}(N)/F_{i+1}(N) \cap (N \cap F_i(G)) &= F_{i+1}(N)/F_i(N) \text{ ist} \\ \text{nilpotent, und daher liegt } F_{i+1}(N) &\text{ in } F_{i+1}(G). \end{aligned}$$

Andererseits ist $F_{i+1}(G) \cap N / F_i(N) = F_{i+1}(G) \cap N / F_i(G) \cap N \cong (F_{i+1}(G) \cap N)F_i(G)/F_i(G)$ nilpotent und daher liegt $F_{i+1}(G) \cap N$ in $F_{i+1}(N)$, denn in beiden Fällen sind die betrachteten Untergruppen normal.

(1.2) Bemerkung: Die obige Beziehung $F_i(G) \cap N = F_i(N)$ gilt auch, wenn N nur subnormal in G ist. Der Beweis besteht aus der Anwendung von (1.1) auf die Glieder einer Normalreihe, die N und G verbindet.

(1.3) Hilfssatz: Sei p eine Primzahl, und G eine auflösbare, p -nilpotente Gruppe. Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$ und $O := O_p(G)$. Dann gilt $F_i(G) = C_S(F_i(O)/F_{i-1}(O))F_i(O)$ für $i \geq 1$.

Beweis: Induktion über i , betrachte zuerst $i = 1$.

Es gilt $C_G(F(O))F(O) = C_S(F(O))F(O)$, da $F(O)$ in O selbstzentralisierend ist ([4], 6.A.3). Daher ist $C_S(F(O))F(O)$ normal in G , und als direktes Produkt einer p -Gruppe mit einer nilpotenten p' -Gruppe nilpotent, liegt also in $F(G)$. Umgekehrt liegt auch $F(G) = O_p(G) \rtimes F(G) \cap O = O_p(G) \rtimes F(O)$ in $C_S(F(O))F(O)$.

Sei die Behauptung also per Induktion richtig für

$i \geq 1$, wir zeigen $F_{i+1}(G) = C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O)$.

In der Faktorgruppe $\bar{G} = G/F_i(O)$ gilt aber wie oben

$C_{\bar{G}}(F(\bar{O}))F(\bar{O}) = C_{\bar{S}}(F(\bar{O}))F(\bar{O})$, also gilt für die Urbilder

dieser Gruppen in G : $C_G(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O) =$

$C_{SF_i(O)}(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O) = C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O)$

und daher ist die Normalität von $C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O)$

in G klar. $F_i(O)$ liegt trivialerweise in dieser Gruppe,

aber auch $C_S(F_i(O)/F_{i-1}(O))$, da $C_S(F_i(O)/F_{i-1}(O))$ mit

$F_i(O)/F_{i-1}(O) = F(O/F_{i-1}(O))$ auch die Operation von O

auf dieser Faktorgruppe, also $O/C_O(F_i(O)/F_{i-1}(O))$ zen-

tralisiert. Wegen der Auflösbarkeit von O ist aber

$F_{i+1}(O)/F_i(O)$ ein Abschnitt dieser Faktorgruppe.

Daher liegt $F_i(G) = C_S(F_i(O)/F_{i-1}(O))F_i(O)$ in

$C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O)$ und die Faktorgruppe

$C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O) / F_i(G)$ ist nilpotent, da sie

$$\begin{aligned} & \text{wegen } [C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_i(G)/F_i(G), F_{i+1}(O)F_i(G)/F_i(G)] \\ & \subseteq F_i(O)F_i(G)/F_i(G) = F_i(G) \end{aligned}$$

das direkte Produkt ihrer p-Sylowgruppe mit einer

nilpotenten p'-Hallgruppe ist. Daher gilt die Inklusion

' $\supseteq$ '. Umgekehrt zentralisiert jede p-Sylowgruppe

von $F_{i+1}(G)$ die Faktorgruppe $F_{i+1}(G) \cap O/F_i(G) \cap O =$

$F_{i+1}(O)/F_i(O)$, da O normal in G ist. Insbesondere

erhält man $F_{i+1}(G) = (F_{i+1}(G) \cap S)(F_{i+1}(G) \cap O) \subseteq$

$C_S(F_{i+1}(O)/F_i(O))F_{i+1}(O)$, die Behauptung.

(1.4) Bezeichnung: Operiere die Gruppe G auf der Menge Ω .

Dann nennt man eine Bahn der Länge |G| auf Ω eine

reguläre Bahn von G auf Ω . Die Anzahl der regulären

G-Bahnen auf Ω bezeichnen wir mit $s_\Omega(G)$.

(1.5) Hilfssatz: Sei G eine Gruppe, und operiere G auf den

Mengen Ω_1 und Ω_2 . Sind die beiden Permutationsdar-

stellungen φ_1, φ_2 ähnlich, so gilt $s_{\Omega_1}(G) = s_{\Omega_2}(G)$. Ist

$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ eine G-invariante Zerlegung von Ω ,

so gilt $s_\Omega(G) = \sum_{i \in I} s_{\Omega_i}(G)$.

Beweis: Ist φ_1 ähnlich zu φ_2 , so existiert eine Bijektion von Ω_1 auf Ω_2 , die Bahnen in Bahnen überführt, und insbesondere reguläre Bahnen von G auf Ω_1 in reguläre Bahnen von G auf Ω_2 überführt. Also gilt $s_{\Omega_1}(G) = s_{\Omega_2}(G)$. Die zweite Behauptung ist klar: die regulären Bahnen von G verteilen sich auf die disjunkten, G -invarianten Mengen der Zerlegung von Ω und können einzeln abgezählt werden.

(1.6) Lemma: Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G , und sei G dargestellt auf der Menge Ω . Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{I}_i$ eine Zerlegung von Ω in Imprimitivitätsgebiete für G , die N -invariant sind und für die $s_{\mathcal{I}_i}(N) = s_{\mathcal{I}_j}(N)$ gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann operiert G/N auf der Menge $\tilde{\Omega} = \{\mathcal{I}_i, 1 \leq i \leq n\}$ und es gilt:

$$s_{\Omega}(G) \geq s_{\mathcal{I}_1}(N) s_{\tilde{\Omega}}(G/N).$$

Beweis: Der Fall $s_{\tilde{\Omega}}(G/N) = 0$ ist trivial, sei also $s_{\tilde{\Omega}}(G/N) \geq 1$. Dann können wir uns wegen (1.5) auf den Fall $s_{\tilde{\Omega}}(G/N) = 1$ beschränken, wobei G/N regulär auf $\tilde{\Omega}$ operiert. Wir haben zu zeigen, daß es zu jeder regulären Bahn von N auf $\mathcal{I}_1$ eine solche von G auf Ω gibt, derart, daß die Zuordnung injektiv ist. Sei $1 \in \mathcal{I}_1$ Element der regulären N -Bahn 1^N .

Wir ordnen der Bahn 1^N von N auf $\mathcal{I}_1$ die Bahn 1^G von G auf Ω zu. Jedes Element $x \in G_1$ muß nun aber ganz $\mathcal{I}_1$ invariant lassen, da die $\mathcal{I}_i$ Imprimitivitätsgebiete für G sind. Da die Operation von G/N auf $\tilde{\Omega}$ aber regulär ist, kann die Restklasse xN , die auf $\tilde{\Omega}$ mindestens einen Fixpunkt hat, aber nur die Klasse N sein, also $x \in G_1 \cap N = N_1 = 1$, da N auf 1^N regulär operiert. Somit ist 1^G eine reguläre Bahn für G , liegen aber die regulären Bahnen 1^N und 2^N von N in derselben Bahn 1^G von G , so erfüllt ein Element $y \in G$ die Gleichung $1^y = 2$, und wie oben folgt wiederum $y \in N$, und $1^N = 2^N$, also ist die Zuordnung injektiv. Daher gilt $s_\Omega(G) \cong s_{\mathcal{I}_1}(N) = s_{\mathcal{I}_1}(N) s_{\tilde{\Omega}}(G/N)$, die Behauptung.

(1.7) Satz: Sei p eine Primzahl, H eine auflösbare p' -Gruppe, A eine abelsche Gruppe der Ordnung p^n , die auf H operiert, und operiere das semidirekte Produkt $G = HA$ transitiv auf der Ziffernmenge Ω . Dann gilt, falls A treu auf Ω operiert: $|\Omega| \leq (p+1)^n s_\Omega(A)$.

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion über die Ord-

nung von HA geführt. Der Induktionsanfang $|H|=1$ wird geliefert durch ([40], I.5.43), hier operiert $HA = A$ regulär auf Ω , also $|\Omega| = |A| = p^n s_{\Omega}(A)$. Die andere Möglichkeit für den Induktionsanfang, $A=1$, also $n=0$, ist vollends trivial. Sei also $H \neq 1$, und $n \geq 1$. Operiert nun H nicht transitiv auf Ω , so zerlegt H Ω in seine Bahnen, die Imprimitivitätsgebiete für G sind nach ([40], II.4.5), und wir bezeichnen mit U die Untergruppe von A , die alle Bahnen von H invariant läßt. Dann operiert G/HU , also auch A/U transitiv und treu auf der Menge $\tilde{\Omega} = \{J_i : i \in I\}$ der Bahnen von H , also wieder regulär nach ([40], I.5.43). Die Bahnen sind unter A konjugiert, daher sind die Permutationsdarstellungen von U auf den J_i sämtlich ähnlich, denn A ist abelsch. Mit (1.6) erhalten wir somit $s_{\Omega}(A) \geq s_{J_1}(U) s_{\tilde{\Omega}}(A/U) = s_{J_1}(U)$, und falls U treu auf den Imprimitivitätsgebieten J_i operiert, so gilt per Induktion ($|U| \leq |A|$) daß $|J_i| \leq (p+1)^i s_{J_i}(U)$, wo $|U| = p^i$, $0 \leq i \leq n$. Da A/U regulär auf $\tilde{\Omega}$ operiert, gilt weiter $|\tilde{\Omega}| = |A/U| = p^{n-i} s_{\tilde{\Omega}}(A/U) = (p+1)^{n-i} s_{\tilde{\Omega}}(A/U)$, also zusammengesetzt:

$$|\Omega| = |\tilde{\Omega}| \cdot |J_i| \leq (p+1)^i s_{J_i}(U) (p+1)^{n-i} s_{\tilde{\Omega}}(A/U) \leq (p+1)^n s_{\Omega}(A), \text{ das Gewünschte. Operiert } U \text{ aber nicht treu auf } J_i, \text{ so auch nicht auf } \Omega.$$

Operiert H aber transitiv auf Ω , so wählen wir einen maximalen A -invarianten Normalteiler N in H . Da H auflösbar ist, ist die Faktorgruppe H/N abelsch, ein irreduzibler A -Modul. Operiert nun auch N transitiv auf Ω , so erhalten wir das Resultat durch Induktion angewandt auf die Gruppe NA , falls nicht, zerlegt N wie oben H die Menge Ω in Imprimitivitätsgebiete für G , die wir wieder zu einer Menge $\tilde{\Omega}$ zusammenfassen, auf der G/N transitiv operiert. Sei wiederum $U \triangleleft A$ die Untergruppe von A , die auf $\tilde{\Omega}$ trivial operiert, dann zentralisiert U die Operation von H auf $\tilde{\Omega}$, also H/N . Da $|H|$ und $|U|$ teilerfremd sind, wird H/N daher von $C_H(U)$ überdeckt nach ([10], I. 18.6), und die Imprimitivitätsgebiete $\mathcal{I}_e$ sind unter $C_H(U)$ konjugiert, d.h. die Permutationsdarstellungen von U auf den $\mathcal{I}_e$ sind ähnlich. Wie oben läßt jedes Element von U , das $\mathcal{I}_1$ ziffernweise festläßt, auch ganz Ω ziffernweise fest, und falls dies für ein $x \in U^*$ der Fall ist, so sind wir fertig. Ansonsten operiert G/NU treu und transitiv auf $\tilde{\Omega}$, NU transitiv auf $\mathcal{I}_e$, wobei die Einschränkung auf U treu ist, und die $\mathcal{I}_e$ sind ähnliche U -Mengen. Falls $NU \neq 1$, so haben beide Gruppen G/NU und NU kleinere Ordnung als G , und wir erhalten das

Gewünschte per Induktion mittels (1.6). Sei also $NU = 1$. Dann ist H ein minimaler, abelscher, transitiver Normalteiler von G , der nach ([6], I.5.13) also regulär auf Ω operiert. Die Ziffernmengenge Ω hat die Mächtigkeit $|H|$, welche zu $|A|$ teilerfremd ist, und daher ist A im Stabilisator einer Ziffer, etwa in G_1 enthalten. G_1 operiert nach ([6], I.2.2) aber auf H^* wie auf $\Omega - \{1\}$, d.h. beide Permutationsdarstellungen von G_1 sind ähnlich, und nach (1.5) gilt $s_{H^*}(A) = s_{\Omega - \{1\}}(A)$. Hat ein von 1 verschiedenes Element z von A aber einen Fixpunkt auf H^* , so gilt wegen der Irreduzibilität von H unter A , daß $1 \neq C_H(z)$ ganz H sein muß, denn A ist abelsch. Dann läßt aber z alle Elemente aus $\Omega - \{1\}$ und die Ziffer 1 fest, und die Operation von A auf Ω ist nicht treu. Ansonsten zerlegt aber A die Menge $\Omega - \{1\}$ wegen ([13], 3.4) in lauter reguläre A -Bahnen, es gilt also $|\Omega| - 1 = p^n s_{\Omega - \{1\}}(A)$. Wegen $|\Omega| > 1$, denn $N = 1$ sollte ja nicht transitiv auf Ω operieren, gilt nun $|\Omega| = 1 + p^n s_{\Omega}(A) \leq (p+1)^n s_{\Omega}(A)$.

(1.8) Bemerkung: Die Kommutativität von A in (1.7) ist notwendig, schon für p -Gruppen der Klasse 2 gilt die Aussage nicht mehr. Ein Beispiel hierfür ist die treue Operation der Diedergruppe der Ordnung 8 auf 4 Ziffern.

(1.9) Lemma: Sei U eine zyklische Gruppe von 2-Potenzordnung, und operiere die Gruppe $\langle \alpha, \beta \rangle = A \cong V_4$ so auf U , daß α jedes Element von U invertiert, und β ganz U zentralisiert. Operiere das semidirekte Produkt $G = UA$ transitiv auf der Menge Ω . Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) $|\Omega| \leq 4$
- (ii) A operiert nicht treu auf Ω , β läßt jede Ziffer von Ω fest
- (iii) $|\Omega| \leq 8 s_{\Omega}(A)$.

Beweis: Das Element β liegt im Zentrum von G , daher läßt β entweder alle Ziffern von Ω fest, was (ii) ergibt, oder operiert fixpunktfrei auf Ω und zerlegt Ω in die zweielementigen Bahnen $\mathcal{I}_\ell, \ell \in \mathbb{I}$, die wieder zu der Menge $\tilde{\Omega}$ zusammengefaßt werden. Dann operiert G auf $\tilde{\Omega}$, und der Kern dieser Permutationsdarstellung, N , enthält das Element β . Liegt auch α in N , so ist $|\Omega| = |G/N| \leq 2$, da α U/N als Faktorgruppe von U invertiert und gleichzeitig zentralisiert. Dann liegt (i) vor. Sei also $\alpha \notin N$. Ist nun U/N nicht transitiv auf $\tilde{\Omega}$, so permutiert α die beiden U/N -Bahnen von $\tilde{\Omega}$, und operiert somit fixpunktfrei auf $\tilde{\Omega}$, also $|\tilde{\Omega}| = 2 s_{\tilde{\Omega}}(\langle \alpha \rangle)$. Mit (1.6) folgt $|\Omega| = |\tilde{\Omega}| \cdot |\mathcal{I}_1| = 2 s_{\mathcal{I}_1}(\langle \beta \rangle) 2 s_{\tilde{\Omega}}(A_{\mathcal{I}_1}) = 4 s_{\Omega}(A)$.

Operiert aber U/N transitiv auf $\tilde{\Omega}$, so regulär.
 Falls α auf $\tilde{\Omega}$ keinen Fixpunkt hat, so folgt wie oben $|\Omega| = 4 s_{\Omega}(A)$, falls α aber eine Ziffer, etwa 1 festläßt, so operiert $\alpha \in (G/N)_1$ wieder auf $(U/N)^{\#}$ ähnlich wie auf $\tilde{\Omega} - \{1\}$. Da α U/N invertiert, hat α auf $(U/N)^{\#}$ genau einen Fixpunkt, das einzige Element der Ordnung 2 nämlich, und somit hat α auch auf $\tilde{\Omega} - \{1\}$ genau einen weiteren Fixpunkt. Daher gilt $|\tilde{\Omega}| = 2 + 2 s_{\tilde{\Omega}}(\langle \alpha \rangle)$, und wir erhalten entweder für $s_{\tilde{\Omega}}(\langle \alpha \rangle) = 0$ die Aussage (i) oder für $s_{\tilde{\Omega}}(\langle \alpha \rangle) \geq 1$ weiter $|\tilde{\Omega}| \leq 4 s_{\tilde{\Omega}}(\langle \alpha \rangle)$. Mit (1.6) folgt dann aber $|\Omega| \leq 8 s_{\Omega}(A)$.

(1.10) Lemma: Sei M eine elementarabelsche p -Gruppe, p prim, und sei α ein Automorphismus von M . Wir fassen M als Vektorraum über $GF(p)$ auf, und α als lineare Transformation von M . Sei K ein endlicher Erweiterungskörper von $GF(p)$, dann sei $M^* = M \otimes_{GF(p)} K$ und $\alpha^* = \alpha \otimes 1 \in GL(M^*)$. Es gilt: $C_{M^*}(\alpha \otimes 1) = (C_M(\alpha)) \otimes_{GF(p)} K$.

Beweis: Das Lemma ist wohlbekannt, ein Beweis findet sich etwa in ([7], Lemma 3.1, Beweis).

(1.11) Lemma: ([1], 10.13 a)

Sei G eine Gruppe, α ein Automorphismus von G , und N ein α -invarianter Normalteiler von G . Dann gilt:

$$|C_{G/N}(\alpha)| \leq |C_G(\alpha)|$$

Beweis: Die Aussage wird durch Induktion über $|G|$ bewiesen. Hierbei ist der Induktionsanfang trivial.

Falls nun $U/N = C_{G/N}(\alpha)$ eine echte Untergruppe von G/N ist, so gilt die Aussage per Induktion für $U/N = C_{U/N}(\alpha)$, also die Behauptung. Sei daher $[G, \alpha]$ in N enthalten. Wir bilden das semidirekte Produkt von G mit der von α erzeugten zyklischen Gruppe. Dann operiert G auf dem semidirekten Produkt einmal durch Konjugation, andererseits aber auch durch Rechtsmultiplikation. Wir berechnen die Mächtigkeit der G -Bahn von α unter der Konjugation. Hier gilt

$|\alpha^G| = |G : C_G(\alpha)|$, die Bahngleichung, und für jedes Element α^x aus α^G gilt $\alpha^x = \alpha[\alpha, x]$ wobei $[\alpha, x]$ nach Annahme in N liegt. Daher liegt die G -Bahn von α unter der Konjugation ganz in der N -Bahn von α unter der Rechtsmultiplikation, hat also höchstens $|N|$ Elemente. Daher gilt $|G : C_G(\alpha)| \leq |N|$, also $|G/N| \leq |C_G(\alpha)|$, das Gewünschte.

(1.12) Bemerkung: Lemma (1.11) kann für den Fall, daß die Ordnungen von G und α teilerfremd sind, dahingehend verschärft werden, daß $C_G(\alpha)$ jeden von α zentralisierten Abschnitt von G überdeckt. ([10], I. 4.6). Im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall, wie jeder p -Automorphismus einer p -Gruppe zeigt.

(1.13) Folgerung: Sei G eine abelsche Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Sei H das semidirekte Produkt von G mit der von α erzeugten zyklischen Gruppe. Dann gilt:

$$|H : H'| \leq |\langle \alpha \rangle| \cdot |Z(H)|.$$

Beweis: trivial.

§ 2 Fixpunktfreie Automorphismen

Ein berühmter Satz von Thompson ([14]) sagt aus, daß eine Gruppe, die einen fixpunktfreien Automorphismus von Primzahlordnung besitzt, nilpotent ist. Für auflösbare Gruppen war der Satz bereits seit langem bekannt, erst Thompson konnte aber zeigen, daß Gruppen mit dieser Eigenschaft stets auflösbar sind. Doch nicht nur die Fittinglänge solcher (auflösbarer) Gruppen ist (durch 1) beschränkt, sondern auch ihre Nilpotenzklasse. Besitzt die Gruppe G einen fixpunktfreien Automorphismus von Ordnung q , q eine Primzahl, so existiert eine nicht von G abhängige Zahl $k(q)$, so daß $c(G) \leq k(q)$ gilt. Dies ist die Hauptaussage aus der G. Higman'schen Arbeit ([9]), in der Higman die Existenz der Funktion $k(q)$ nachwies und zeigen konnte, daß für ungerade Primzahlen stets $k(q) \geq 1/4 (q^2 - 1)$ gilt. Bekannt waren seit Burnside die Werte $k(2) = 1$, $k(3) = 2$, und Higman zeigte $k(5) = 6$. Seine Vermutung, die später Scimemi noch für $q = 7$ bestätigte, war $k(q) = 1/4 (q^2 - 1)$, doch er konnte nicht einmal eine Majorante für die Funktion $k(q)$ angeben. Das gelang erst Kostrikin und Kreknin in ([11], [12]), die zeigten, daß

$$k(q) \leq \frac{(q-1)^{2^{q-1}-1} - 1}{q-2} \quad \text{gilt. Doch wie ein Vergleich mit}$$

den bekannten Werten zeigt, ist diese Schranke weit davon entfernt, den exakten Wert von $k(q)$ anzugeben. Im Fol-

genden will ich die Kostrikin sche bzw. Krekninsche Schranke verbessern, und insbesondere für metabelsche Gruppen den exakten Wert von $k(q)$ angeben.

Wir gehen vor wie in der grundlegenden Arbeit [9]. Wir wollen zeigen, daß $c(G) \leq m$ für ein noch näher zu bestimmendes m gilt, wenn G eine (nilpotente) Gruppe mit dem fixpunktfreien Automorphismus α der Primzahlordnung q ist. Sei im übrigen q stets eine Primzahl, selbst wenn es nicht ausdrücklich vermerkt wird. Aus der Fixpunktfreiheit von α auf G folgt natürlich die von α auf jeder der (charakteristischen) Sylowgruppen von G . Es genügt daher, G als p -Gruppe anzunehmen, und offenbar gilt $p \neq q$. α induziert auch auf dem assoziierten Lie-Ring L einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q (siehe [4], 5.6.2), und das gleiche auf der Lie-Algebra $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\omega]$ über $\mathbb{Z}[\omega]$, wo ω eine q -te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ sei. Da die Nilpotenzklasse dieses Tensorproduktes gleich der von L , also gleich der von G ist, genügt es offenbar, im Folgenden eine nilpotente Lie-Algebra L über einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln enthält, mit einem fixpunktfreien Automorphismus α der Ordnung q zu betrachten, und $c(L) \leq m$, d.h. $L^{m+1} = 0$ zu zeigen. L läßt sich unter α aber in die direkte Summe der Eigenräume L_i zu den Eigenwerten ω^i zerlegen, denn für $a \in L$ gilt, da q die Charakteristik von L nicht teilt, $a = 1/q \left(\sum_{i=0}^{q-1} a_i \right)$ wo für $0 \leq i \leq q-1$ $a_i := a + \omega^{-i} \alpha + \dots + \omega^{i(q-1)} a \alpha^{(q-1)} \in L_i$.

Elemente aus L_i für $0 \leq i \leq q-1$ heißen homogen vom Gewicht i . Produkte von homogenen Elementen sind wieder homogen, und offenbar ist das Gewicht eines Produktes gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Faktoren. Dabei sind die Exponenten i von ω natürlich stets modulo q zu reduzieren, wir fassen sie als Elemente einer Gruppe $C \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ auf und bezeichnen sie in kanonischer Weise mit $0, 1, \dots, q-1$. Dabei seien sie in dieser Weise auch angeordnet.

Da L von homogenen Elementen erzeugt wird, wird L^k für $k \geq 2$ offenbar von k -fachen Produkten homogener Elemente erzeugt. Um $L^{m+1} = 0$ zu beweisen, brauchen wir also nur zu zeigen, daß jedes $(m+1)$ -fache Produkt homogener Elemente aus L gleich 0 ist. Hierfür werden wir die Fixpunktfreiheit von α , also $L_0 = 0$, benutzen. Wir können uns nämlich darauf beschränken zu zeigen, daß ein Faktor $[x_1, x_2, \dots, x_s]$ des Elements $v = [x_1, x_2, \dots, x_{m+1}]$, wo $s \leq m+1$ gelte und die Elemente x_j homogen vom Gewicht i_j seien, in L_0 liegt, also Gewicht 0 hat. Wir gehen daher über zu Tupeln von Elementen aus C , $(i_1, i_2, \dots, i_{m+1})$, und haben zu zeigen, daß für einen Abschnitt $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ mit $s \leq m+1$ gilt $i_1 + i_2 + \dots + i_s = 0$. Das Element v kann aber auch erst mit Hilfe der Jakobi-Identität und der Distributivgesetze in L manipuliert, d.h. als Summe zweier Produkte derselben homogenen Elemente x_j , wo allerdings die Produktbildung gewissen Permutationen

unterworfen wird, dargestellt werden. Es genügt offenbar ebenfalls zu zeigen, daß v sich auf diese Weise als Summe zweier Elemente darstellen läßt, die beide gleich 0 sind. In diesem Sinne ist es auch zu verstehen, wenn wir im folgenden Tupel von Elementen aus C formal manipulieren, addieren oder gleich 0 setzen. Wir sagen, ein Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ von Elementen aus C stelle 0 dar, falls für einen Abschnitt $(i_1, \dots, i_s)$ mit $k \geq s$ gilt $i_1 + \dots + i_s = 0$.

(2.1) Definition: Sei $x = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in C^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann setze

$$\mathcal{P}(x) := \left\{ \sum_{j=1}^k i_{j\sigma} : \sigma \in \text{Sym}\{1, 2, \dots, n\}, k \leq n \right\}$$

$$\overline{\mathcal{P}(x)} := \{i_1, i_1 + i_2, i_1 + i_2 + i_3, \dots, i_1 + \dots + i_n\}$$

$$\text{und } s(x) := |\mathcal{P}(x)|.$$

(2.2) Lemma: Sei $1 \leq n \leq q-1$, $x = (i_1, \dots, i_n) \in (C^\#)^n$.

Dann gilt eine der beiden Aussagen:

$$(i) \quad i_1 = i_2 = \dots = i_n, \text{ und } \mathcal{P}(x) = \{i_1, i_1 + i_1, \dots, \underbrace{i_1 + \dots + i_1}_n\},$$

$$(ii) \quad s(x) \neq n+1.$$

Beweis: Für $n = 1$ ist trivialerweise (i) erfüllt, und

für $n = 2$ gilt entweder (i), oder die Elemente i_1 , i_2 , und i_1+i_2 sind verschieden und (ii) gilt. Wir verwenden Induktion über n .

Falls für das Tupel $x = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ gilt $i_1 = i_2 = \dots = i_n$, so ist (i) erfüllt. Andernfalls existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit: $y = (i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n) \in (C^*)^{n-1}$ ist nicht konstant. Dann enthält $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x)$ nach Induktion n verschiedene Elemente $k_1, \dots, k_n \in C$ und $\mathcal{P}(x)$ enthält ebenso die n verschiedenen Elemente $k_1+i_j, k_2+i_j, \dots, k_n+i_j \in C$. Falls (ii) nicht gelten sollte, müßten die beiden Mengen $\{k_1, \dots, k_n\}$ und $\{k_1+i_j, \dots, k_n+i_j\}$ gleich sein, und das Element i_j operiert obwohl von Ordnung q auf einer Menge von $n \leq q-1$ Elementen, ein Widerspruch.

(2.3) Korollar: Sei $x = (i_1, i_2, \dots, i_{q-1}) \in (C^*)^{q-1}$. Dann gilt: $\mathcal{P}(x) \in \{C, C^*\}$.

Beweis: Falls x ein konstantes Tupel ist, so ist

$\mathcal{P}(x) = C^*$, da jedes Element aus C Ordnung q hat.

Ist x nicht konstant, so folgt aus (2.2 ii) $s(x) \sim q$, also $\mathcal{P}(x) = C$.

(2.4) Lemma: Sei $2 \leq n \leq q$, und sei $x = (i_1, \dots, i_n) \in (C^*)^n$ mit $|\{i_j : 1 \leq j \leq n\}| = 2$, $i_1 \neq i_2$.
Dann gilt $0 \in \overline{\mathcal{P}(x)}$ oder $|\overline{\mathcal{P}(x)}| \geq n$.

Beweis: Für $n = 2$ ist die Aussage trivial, sei also $n = 3$, und die Aussage per Induktion für alle kleineren n bewiesen. Sei $y = (i_1, \dots, i_{n-1})$, dann können wir auf y Induktion anwenden, und sind für $0 \in \overline{\mathcal{P}(y)} = \overline{\mathcal{P}(x)}$ fertig. Dasselbe gilt, falls $|\overline{\mathcal{P}(y)}| \geq n$ gilt. Sei also $\overline{\mathcal{P}(y)} = \overline{\mathcal{P}(x)} = \{i_1\} \cup J$ von der Mächtigkeit $n-1$, und gelte $0 \notin \overline{\mathcal{P}(x)}$.

Nun können alle Elemente aus J durch $i_1 + i_2$ oder $i_1 + i_2 + b$ mit $b \in \mathcal{P}((i_3, \dots, i_{n-1}))$ erhalten werden. Daher ist für jedes Element $k \in J$ das Element $k + i_n$ in $\overline{\mathcal{P}(x)}$ enthalten. Ist $i_n = i_2$, so ist auch das Element $i_1 + i_n = i_1 + i_2$ in J enthalten, und i_n operiert auf der Menge $\overline{\mathcal{P}(x)}$. Ist aber $i_n = i_1$, so gilt wegen $0 \notin \overline{\mathcal{P}(x)}$ für $k \in J$ stets $k + i_n = k + i_1 \neq i_1$. Daher operiert i_n in diesem Falle auf der Menge J . Das Element $i_n \in C^*$ der Ordnung q kann aber nicht nichttrivial auf einer Menge der Mächtigkeit $n-1$ oder $n-2$ operieren, ein Widerspruch.

(2.5) Satz: Sei G eine metabelsche Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Primzahlordnung q , und operiere α fixpunktfrei auf G . Dann ist G nilpotent von Klasse kleiner gleich $q-1$.

Beweis: Für die Primzahlen $q = 2, 3$ ist nichts zu zeigen, hier ist das Ergebnis bekannt. Sei also $q > 3$. Wie in der Einleitung zu § 2 beschrieben, genügt es, $L^q = 0$ zu zeigen, wenn L irgend eine metabelsche Lie-Algebra über einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln enthält, ist, die einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q besitzt, denn die Metabelschheit der nilpotenten Gruppe G vererbt sich auf ihren assoziierten Lie-Ring. Dabei schreibt sich die Jakobi-Identität in folgendem Fall besonders einfach:

Seien $v \in L^2$, $a, b \in L$, dann gilt

$$[v, a, b] + [a, b, v] + [b, v, a] = [v, a, b] - [v, b, a] = 0.$$

Daraus folgt, da L^2 ein Ideal in L ist, daß für $v \in L^2$,

$v_1, v_2, \dots, v_n \in L$ stets gilt $(1 \leq i \leq n-1)$

$$[v, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n] = [v, v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n].$$

Da die Transpositionen $(i \ i+1)$ aber die symmetrische Gruppe vom Grad n erzeugen, wenn i von 1 bis $n-1$ läuft, gilt für jede Permutation der Ziffern $\{1, 2, \dots, n\}$, σ :

$$(*) \quad [v, v_1, v_2, \dots, v_n] = [v, v_{1\sigma}, v_{2\sigma}, \dots, v_{n\sigma}].$$

Daher sind für uns im Folgenden q -Tupel von Elementen aus C , die durch eine Permutation der Komponenten $3, \dots, q$ auseinander hervorgehen, gleich. Und daher ist ein Tupel $x \in C^q$ gleich 0, wenn $0 \in \overline{\mathcal{P}(x)}$.

Sei nun $x = (i_1, i_2, \dots, i_q)$ ein beliebiges q -Tupel von Elementen aus C , und sei $x \neq 0$.

Dann gilt offenbar $x \in (C^*)^q$, und 0 ist nicht in $\overline{\mathcal{P}(x)}$ enthalten. Sei $z := (i_3, \dots, i_q)$.

1. Fall: $i_1 = i_2$.

Da x kein konstantes Tupel ist, sonst hätte x nämlich selbst Gewicht 0, kann z auch kein konstantes Tupel sein. Denn die Tupel $(i_2, i_3, i_1, \dots, i_q)$ und $(i_3, i_1, i_2, \dots, i_q)$ erfüllen sonst die Voraussetzungen von (2.4) und sind gleich 0. Dann ist aber auch $x = 0$, denn es läßt sich mittels der Jakobi-Identität aus diesen beiden Tupeln darstellen.

Daher folgt aus (2.2) $s(z) \geq q-1$, und da nach Voraussetzung $-i_1 - i_2$ nicht in $\mathcal{P}(z)$ liegt, muß

$-i_1 = -i_2$ darin enthalten sein. Sei $i_{j_1} + i_{j_2} + \dots + i_{j_t} = -i_1$ für $3 \leq j_1, j_2, \dots, j_t \leq q$, und sei σ eine

Permutation der Ziffern $3, \dots, q$ derart, daß

$3^\sigma = j_1, 4^\sigma = j_2, \dots, (t+2)^\sigma = j_t$. Dann gilt wegen (*)

$$x = (i_1, i_2, i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_t}, \dots)$$

und mit der Jakobi-Identität folgt $(**)$

$$\begin{aligned} x + (i_2, i_{j_1}, i_1, \dots) + (i_{j_1}, i_1, i_2, \dots) &= \\ x + (i_2, i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_t}, i_1, \dots) + (i_{j_1}, i_1, i_{j_2}, \dots, i_{j_t}, i_2, \dots) &= 0 \end{aligned}$$

und daher $x = 0$, da die beiden anderen Tupel nach Wahl der $i_{j_1}, \dots, i_{j_t}$ die 0 darstellen.

2. Fall: $i_1 \neq i_2$.

Dann gibt es ein $i_j \in \{i_3, \dots, i_q\}$ mit $i_1 \neq i_j \neq i_2$.

Sonst wäre nämlich $x = 0$ nach (2.4). Wegen $(*)$

können wir annehmen, daß dieses i_j gleich i_3 ist.

Sei $y := (i_4, \dots, i_q)$, dann gilt nach (2.2) $s(y) \geq q-3$.

Da $0 \notin \mathcal{F}(x)$, liegen die Elemente $-i_1-i_2-i_3$ und $-i_1-i_2$ nicht in $\mathcal{F}(y) \subseteq \mathcal{F}(z)$. Ist nun y ein nicht konstantes Tupel, so gilt nach (2.2)

$$\mathcal{F}(y) = C - \{-i_1-i_2, -i_1-i_2-i_3\}$$

und da nach Voraussetzung i_3 verschieden von 0, i_1

und i_2 ist, müssen die beiden Elemente $-i_1-i_3$

und $-i_2-i_3$ in $\mathcal{F}(y)$ enthalten sein. Wie in

$(**)$ läßt sich daher x durch zwei Tupel ausdrücken, die die 0 darstellen, ist selbst also 0.

Sei y schließlich ein konstantes Tupel.

Dann ist nach (2.2) wegen $q-3 < q$ die 0 nicht in $\mathcal{F}(y)$ enthalten. Es gilt aber auch $0 \neq -i_1-i_2$, da sonst $i_1+i_2 = 0$, und x die 0 darstellen würde, und ebensowenig gilt $0 = -i_1-i_2-i_3$, daher ist in diesem Falle $\mathcal{F}(y) = C - \{0, -i_1-i_2, -i_1-i_2-i_3\}$. Nach Voraussetzung sind die Elemente $-i_1-i_3$ und $-i_2-i_3$ wieder von den Elementen $-i_1-i_2$ und $-i_1-i_2-i_3$ verschieden sein, müssen also entweder gleich 0 sein oder in $\mathcal{F}(y)$ liegen. In jedem der möglichen Fälle liefert die zu (***) analoge Anwendung der Jakobi-Identität eine formale Gleichung $x + a_1 + a_2 = 0$, wo die Tupel a_1, a_2 die 0 darstellen, also $x = 0$.

Die Widersprüche in den Fällen 1 und 2 zeigen, daß die Wahl $x \neq 0$ unmöglich war. Also ist der Satz bewiesen.

(2.6) Korollar: Es ist $k(q) = q-1$ für metabelsche Gruppen.

Beweis: Nach (2.5) gilt $k(q) \leq q-1$ für metabelsche Gruppen. Wir haben nur noch zu zeigen, daß diese Schranke scharf ist. Dazu werden wir zu jeder Primzahl q eine metabelsche Gruppe konstruieren, die einen

fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q besitzt, und selbst nilpotent der Klasse $q-1$ ist.

Sei q eine beliebige Primzahl, und sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, daß $p-1$ durch q teilbar ist. Die Existenz von p wird durch den Dirichlet'schen Primzahlsatz gesichert. Sei F eine freie Gruppe vom Rang 2, und N die charakteristische Untergruppe von F , die von allen p -ten Potenzen von Elementen aus F sowie von F' erzeugt wird. Dann ist F/N eine endliche nilpotente Gruppe der Klasse $p-1$ nach ([14]). Nach Wahl der Primzahl p ist $p-1 > q-1$, sei $M/N = K_q(F/N)$. Dann ist M eine charakteristische Untergruppe von F , und F/M hat genau die Nilpotenzklasse $q-1$. Auf F definieren wir einen Endomorphismus folgendermaßen: seien x, y Elemente von F , die zusammen F erzeugen, und sei die natürliche Zahl r so gewählt, daß $r^q \equiv 1 \pmod{p}$ ist. Wegen $p \equiv 1 \pmod{q}$ ist diese Wahl möglich. Dann ist durch die Abbildungsvorschrift $x \longrightarrow x^r$ und $y \longrightarrow y^r$ ein Endomorphismus von F definiert, der M in sich überführt. Daher induziert er einen Endomorphismus auf der Faktorgruppe F/M , den wir α nennen wollen. α bildet aber das Erzeugendensystem xM, yM auf ein Erzeugendensystem x^rM, y^rM ab, ist also ein Automorphismus von F/M .

Da α^q die Erzeuger wieder auf sich abbildet, ist die Ordnung von α gleich q , und modulo $(F/M)'$ bildet α jedes Element auf seine r -te Potenz ab. Per Induktion folgt sofort, daß α sämtliche Elemente aus $K_i(F/M)$ für $1 \leq i \leq q-1$ modulo $K_{i+1}(F/M)$ auf ihre r^i -te Potenzen abbildet, insbesondere auf diesen Abschnitten von F/M fixpunktfrei operiert. Mit (1.12) folgt nun die Fixpunktfreiheit von α auf F/M .

(2.7) Hilfssatz: Sei L eine nilpotente Lie-Algebra über einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln für die Primzahl q enthält, und sei α ein fixpunktfreier Automorphismus der Ordnung q von L . Sei M ein α -invariantes Ideal von L , dann gilt:

$$[M, \underbrace{L, \dots, L}_{q-1}] \subseteq [M, L^2].$$

Beweis: Da M α -invariant ist, zerfällt in L auch M in eine direkte Summe von Eigenräumen für α zu den Gewichten $0 \leq i \leq q-1$, und es gilt $M_0 \subseteq L_0 = 0$. Daher wird $[M, \underbrace{L, \dots, L}_{q-1}]$ von Produkten $[v, v_1, v_2, \dots, v_{q-1}]$ homogener Elemente $v \in M, v_1, \dots, v_{q-1} \in L$ erzeugt. In Analogie zu (*), wo wir auch die Idealeigenschaft von L^2 ausnutzten, gilt für ein derartiges Produkt

aber $[v, v_1, v_2, \dots, v_{q-1}] = [v, v_1\sigma, v_2\sigma, \dots, v_{q-1}\sigma]$
 modulo $[M, L^2]$, und wir haben $[v, v_1\sigma, \dots, v_{q-1}\sigma] = 0$
 für ein $\sigma \in \text{Sym}(q)$ zu zeigen. Wir gehen über zu den
 entsprechenden Gewichtstupeln. Sei $x = (i_1, \dots, i_q)$
 ein beliebiges q -Tupel von Elementen aus C . Wir haben
 nachzuweisen, daß für eine Permutation σ der Ziffern
 $2, \dots, q$ das Tupel $(i_1, i_2\sigma, \dots, i_q\sigma)$ die Null darstellt,
 daß also $-i_1 \in \mathcal{P}(i_2, \dots, i_q)$ gilt. Der Fall, daß
 eine Komponente gleich 0 ist, ist trivial.
 Sei daher $x \in (C^\bullet)^q$. Dann ist insbesondere $i_1 \neq 0$,
 und die Behauptung $-i_1 \in \mathcal{P}(i_2, \dots, i_q)$ folgt
 aus (2.3).

(2.8) Korollar: Sei L eine nilpotente Lie-Algebra über
 einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln für die
 Primzahl q enthält, und sei α ein fixpunktfreier
 Automorphismus der Ordnung q von L . Dann gilt für
 $n \geq 1$: $L^{1+(q-1)n} \subseteq (L^2)^{1+n}$.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Aussage in (2.5) offenbar
 mitbewiesen worden. Per Induktion sei bereits
 $L^{1+(q-1)(n-1)} \subseteq (L^2)^{1+(n-1)}$ gezeigt. Dann ist $(L^2)^n$
 nach ([1], 8.5) ein Ideal in L , das offenbar α -
 invariant ist. Mit (2.7) folgt nun

$$L^{1+(q-1)n} = L^{1+(q-1)(n-1)+(q-1)} \subseteq \left[(L^2)^n, \underbrace{L, \dots, L}_{q-1} \right] \subseteq \left[(L^2)^n, L^2 \right] = (L^2)^{1+n}, \text{ was zu beweisen war.}$$

(2.9) Korollar: Sei L eine Lie-Algebra über einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln für die Primzahl q enthält, und sei α ein fixpunktfreier Automorphismus der Ordnung q von L . Ist $L^{(n+1)} = 0$ für ein $n \geq 1$, so gilt $c(L) \leq (q-1)^n$.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Aussage gerade Inhalt von (2.5), auch wenn dieser Satz für metabelsche Gruppen formuliert wurde. Bewiesen wurde er für metabelsche, nilpotente Lie-Algebren.

Sei die Aussage nun für $n-1$ bewiesen. Dann gilt

$$L^{1+(q-1)^n} = L^{1+(q-1)(q-1)^{n-1}} \subseteq (L^2)^{1+(q-1)^{n-1}}$$

nach (2.8). Doch auch L^2 erfüllt die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes und erfüllt $(L^2)^{(n)} = 0$ nach Voraussetzung. Induktion ergibt daher $c(L^2) \leq (q-1)^{n-1}$ und $(L^2)^{1+(q-1)^{n-1}} = 0$.

Daher ist $L^{(q-1)^{n+1}} = 0$ gezeigt, und $c(L) \leq (q-1)^n$.

(2.10) Bemerkung: Die Beweisidee von (2.9) stammt von Kostrikin und Kreknin aus [11]. Da sie jedoch nicht über (2.5) verfügten, war ihr Induktionsanfang nur $L^{2+(q-1)} \subseteq L^{(2)}$ aus (2.7). Sie erhielten statt (2.9) lediglich die Inklusion $L^{1+f(n)} \subseteq L^{(1+n)}$, wo die Funktion $f(n)$ gegeben ist durch $f(n) = \sum_{i=0}^n (q-1)^i$. Dies ist offenbar eine schwächere Aussage als (2.9). Das weitere Vorgehen folgt nun den Ideen von Kreknin aus [12]. Eine kleine Änderung in seinem Beweis setzt uns jedoch in die Lage, mit etwas Rechenaufwand seine Schranke um einen Faktor 2 zu verbessern.

(2.11) Definition: Sei $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{q-1}$ die direkte Zerlegung der Lie-Algebra L mit dem fixpunktfreien Automorphismus α der Ordnung q in die Eigenräume von α zu den Gewichten $1 \leq i \leq q-1$. Dann werde mit $L_{(i)}$ bezeichnet die von den L_j mit $j > i$ erzeugte Unterálgebra von L . Für $i \geq q-1$ sei $L_{(i)} = 0$ gesetzt.

(2.12) Hilfssatz: Sei $q > 3$ prim, und sei L eine Lie-Algebra über einem Ring, der die q -ten Einheitswurzeln enthält, und α ein fixpunktfreier Automorphismus der

Ordnung q von L . Dann ist L direkte Summe der Eigenräume L_i von α , und es gilt: $L^{(i)} \subseteq L_{(i)}$ für $i = 1, 2, 3$.

Beweis: Wie in der Einleitung zu § 2 beschrieben, gehen wir zu den Gewichtstupeln der Produkte homogener Elemente aus L über, da offenbar auch die $L^{(i)}$ von derartigen Produkten erzeugt werden. Allerdings müssen wir nun auch Tupel zulassen, deren Komponenten selbst Tupel von Elementen aus C sind. Es ist klar, daß Gleichungen der Form $(i_1, (i_2, i_3)) = (i_1, i_2 + i_3)$ gültig sind. Wir haben zu zeigen, daß sich ein Tupel, das die allgemeinste Form eines Gewichtstupels eines der oben genannten Erzeuger von $L^{(i)}$ repräsentiert, darstellen läßt als formale Summe von Tupeln, die entweder 0 sind oder deren Komponenten größer sind als i . Offenbar können wir uns auf von 0 verschiedene Tupel beschränken, seien also alle Gewichte, die im Schriftbild dieser Tupel auftreten, von 0 verschieden.

$i = 1$: (Kreknin) Sei $(i_1, i_2) \in (C^*)^2$ beliebig.

Wegen $(i_1, i_2) = (i_1 + i_2)$ sind die Fälle $i_1 + i_2 = 0$ und $i_1 + i_2 > 1$ trivial. Sei also $i_1 + i_2 = 1$. Dann müssen wegen $i_1, i_2 \in C^*$ beide Elemente größer als 1 sein, und wir sind fertig.

$i = 2$: Sei $((i_1, i_2), (i_3, i_4)) \in ((C^q)^2)^2$.

Wir können sukzessive annehmen, daß die Elemente $i_1+i_2+i_3+i_4$, i_1+i_2 , und i_1 in $\{1, 2\} \subseteq C$ liegen. Falls $i_1+i_2+i_3+i_4 \in \{1, 2\}$, sind wir nämlich von vorneherein fertig, was auch der Fall ist, wenn weder i_1+i_2 noch i_3+i_4 in $\{1, 2\}$ liegt. In den übrigen Fällen können wir durch geeignete Umbenennungen obige Annahme herstellen. Sei nun $i_1 = 1$. Dann ist wegen $i_1+i_2 \in \{1, 2\}$ auch $i_2 = 1$, und wegen $i_1+i_2+i_3+i_4 \in \{1, 2\}$ folgt entweder $i_3+i_4 = 0$, und das Ausgangstupel ist 0, oder $i_3+i_4 = q-1$. Zur Abkürzung sei im Folgenden für $q-j \in C$ auch $-j$ geschrieben. Dann gilt: $((i_1, i_2), (i_3, i_4)) = (1, 1, -1)$. (Linksnormierung der Gewichtstupel analog der Linksnormierung beim Lie-Produkt!), und mit der Jakobi-Identität (JI) folgt: $(1, 1, -1) + (1, -1, 1) + (-1, 1, 1) = 0$. Die beiden letzten formalen Summanden sind aber 0, daher $((i_1, i_2), (i_3, i_4)) = (1, 1, -1) = 0$.

Sei also $i_1 = 2$. Dann gilt $i_2 = -1$, und $i_3+i_4 = 1$. Also ist $((i_1, i_2), (i_3, i_4)) = (2, -1, 1)$, und mit JI folgt $(2, -1, 1) + (-1, 1, 2) + (1, 2, -1) = (2, -1, 1) + 0 + (3, -1) = 0$.

Wegen $q > 3$ sind aber 3, -1 größer als 2, somit folgt die Behauptung.

$i = 3$: Sei $((i_1, i_2), (i_3, i_4)), ((i_5, i_6), (i_7, i_8))) =: x$
beliebig aus $((C^*)^2)^2$.

Dann können wir wie im zweiten Abschnitt
annehmen, daß die Elemente $i_1, i_1+i_2,$
 $i_1+i_2+i_3+i_4$ und $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+i_6+i_7+i_8$
in der Menge $\{1, 2, 3\} \subseteq C$ liegen.

1. Fall: $i_1+i_2+i_3+i_4 = 1$.

(1.1) sei $i_1+i_2 = 2$, dann ist $i_3+i_4 = -1$.

(1.1.1) $i_1 = 1$, dann $i_2 = 1$, und

$((i_1, i_2), (i_3, i_4)) = (1, 1, -1) = 0$ und $x = 0$.

(1.1.2) $i_1 = 2$, dann $i_2 = 0$ und ein Widerspruch.

(1.1.3) $i_1 = 3$, dann $i_2 = -1$, sei $j := i_5+i_6+i_7+i_8$.

Dann gilt $1+j = 3$, und für j gibt es zwei
Möglichkeiten. Ist $j = 1$, so ist
 $x = (3, -1, -1, 1)$ und mit JI folgt
 $x + (-1, 1, (3, -1) + (1, (3, -1), -1) =$
 $x + 0 + (3, -1, 1, -1) = x + (-1, 1, 3, -1) +$
 $+ (1, 3, -1, -1) = x + 0 + (4, -1, -1) = 0$
und wegen $q > 3$ sind die Elemente $4, -1 > 3$.
Ist aber $j = 2$, so folgt $x = (3, -1, -1, 2)$,
und durch Anwenden der JI erhält man
 $x + (-1, 2, (3, -1)) + (2, (3, -1), -1) =$
 $x + (1, (3, -1)) + (4, -1) = x + (-1, 1, 3) +$
 $+ (1, 3, -1) + (4, -1) = x + 0 + (4, -1) + (4, -1)$
 $= 0$, und die Behauptung folgt wie oben.

(1.2) sei $i_1+i_2 = 3$, dann ist $i_3+i_4 = -2$.

(1.2.1) $i_1 = 1$, dann $i_2 = 2$, und wir haben

$((i_1, i_2), (i_3, i_4)) = (1, 2, -2)$. Sei $(m, n) := ((i_5, i_6), (i_7, i_8))$. Falls $j = m+n \geq 3$, so hat x ein Gewicht von $1+j \geq 1+3$, ist also entweder 0 oder $1+j > 3$. Dann sind wir fertig. Dasselbe gilt, falls $j = m+n = 0$. Sei $j = 1$. Der Fall $m = 0$ oder $m = 1$ ist trivial, sei etwa $m = 2$. Dann gilt $n = -1$, und wir erhalten $x = (1, 2, -2, (2, -1))$. Mit JI folgt:

$$\begin{aligned} x &= (-1, (1, 2, -2), 2) + (1, 2, -2, 2, -1) = \\ &= 0 + (1, 2, (-2, 2), -1) + (-2, (2, (1, 2)), -1) = \\ &= 0 + (-2, 2+3, -1) \end{aligned}$$

und dieses Tupel ist für $q = 5$ gleich 0, für $q > 5$ aber sind seine Komponenten größer als 3. Falls $m = -1$, so hat man nur die Rollen von m und n zu vertauschen. Sei also $m = 3$, $n = -2$. Dann gilt $x = (1, 2, -2, (3, -2))$ und man erhält

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, -2, 3, -2) + (-2, (1, 2, -2), 3) = \\ &= (4, -2) + (-2, (1, 2), -2, 3) + (-2, -2, (1, 2), 3) = \\ &= (4, -2) + (-2, 1, 2, -2, 3) + 0 + (2, (-2, -2), 1, 3) + \\ &\quad (-2, -2, 1, 2, 3) = \\ &= (4, -2) + (-2, 1, -2, 2, 3) + 0 + (-3, 2, 3) = \\ &= (4, -2) + (-1, -2, (2, 3)) + 0 + (-3, (2, 3)) = \\ &= (4, -2) + (-1, -2, (2+3)) + (-3, 2+3); \end{aligned}$$

Falls nun $q > 5$, so sind wir fertig, da alle rechts auftretenden Komponenten größer als 3 sind. Für $q = 5$ sind zwar die beiden letzten Tupel, die wir aus $(-2, (1, 2, -2), 3)$ berechneten, gleich 0, dafür müssen wir mit dem ersten formalen Summanden sorgfältiger umgehen. Es gilt hier $-2 = 3$, und wir erhalten

$$x = (1, 2, 3, 3, 3) + 0 = (1, 3, 2, 3, 3) = (1, 3, 3, 2, 3) = (1, 3, 3, 3, 2),$$

und daher stellt x die 0 dar und ist 0.

Bleibt also der Fall $4 \leq m, n \leq -3$ zu betrachten; und automatisch ist $q > 5$. Dann gilt:

$$x = (1, 2, -2, (m, n)) = (1, m, n) + (n, 1, m) = (1+m, n) + (n+1, m)$$

und nach Voraussetzung sind alle Komponenten größer als 3.

Sei schließlich noch $j = m+n = 2$. Dann gilt:

$$x = (1, 2, -2, 2) = (1, 2, 2, -2) = (3+2, -2)$$

und dies ist 0 für $q = 5$, und sonst sind $3+2$ und -2 größer als 3.

(1.2.2) $i_1 = 2$, dann ist $i_2 = 1$, man vertausche i_1, i_2 .

(1.2.3) $i_1 = 3$, das widerspricht $i_2 \neq 0$.

(1.3) $i_1+i_2 = 1$. Dann ist $x = 0$ wegen $i_3+i_4 = 0$.

2. Fall: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 2$.

(2.1) $i_1 + i_2 = 1$, dann ist $i_3 + i_4 = 1$.

(2.1.1) $i_1 = 1$ widerspricht $i_2 \neq 0$.

(2.1.2) $i_1 = 2$, dann ist $i_2 = -1$.

Offenbar kann j nur die Werte 1 oder $-1, 0$ annehmen, sei zuerst $j = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= (2, -1, 1, 1) = (2, 1, -1, 1) = (2, 1, 1, -1) \\ &= (4, -1); \end{aligned}$$

Sei $j = -1$, dann gilt

$$x = (2, -1, 1, -1) = (2, -1, -1, 1) = 0.$$

Dies gilt auch für $j = 0$. Alle möglichen Fälle führen also zum Ziel.

(2.1.3) $i_1 = 3$, dann ist $i_2 = -2$. Wir brauchen nur die Fälle $j = 1, -1$ zu betrachten. Sei $j = 1$.

$$\begin{aligned} x &= (3, -2, 1, 1) = (3, (-2, 1), 1) + (-2, (1, 3), 1) = \\ &= (3, -1, 1) + (-2, (1, 3, 1)) + (1, 3, (1, -2)) = \\ &= (4, -1) + (-2, 4+1) + (4, -1). \end{aligned}$$

Das liefert für $q = 5$ und für $q > 5$ die Behauptung. Sei daher $j = -1$. Dann gilt

$$x = (3, -2, 1, -1) = (3, -2, -1, 1) = 0.$$

(2.2) $i_1 + i_2 = 2$ dann ist $x = 0$.

(2.3) $i_1 + i_2 = 3$, also $i_3 + i_4 = -1$.

Der Fall $j = 1$ führt nun zu $x = (3, -1, 1) = (4, -1)$ und wir sind fertig. Sei daher $j = -1$.

(2.3.1) $i_1 = 1$, dann $i_2 = 2$, und es gilt

$$x = (1, 2, -1, -1) = (1, (2, -1), -1) = (1, 1, -1) = 0.$$

(2.3.2) $i_1 = 2$, dann $i_2 = 1$, und man vertausche

i_1 und i_2 miteinander.

(2.3.3) $i_1 = 3$ widerspricht $i_2 \neq 0$.

3.Fall: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 3$. Dann ist $j = -1$ oder $= -2$.

(3.1) $i_1 + i_2 = 1$, dann gilt $i_3 + i_4 = 2$.

(3.1.1) $i_1 = 1$ tritt wegen $i_2 \neq 0$ nicht auf.

(3.1.2) $i_1 = 2$, dann $i_2 = -1$, und zwei Fälle sind

zu betrachten. Ist $i_3 = 1$, so auch $i_4 = 1$,

und für $j = -1$ gilt

$$\begin{aligned} x &= (2, -1, (1, 1), -1) = (2, -1, 1, 1, -1) = (2, -1, 1, -1, 1) \\ &= (2, -1, -1, 1, 1) = 0, \quad \text{für } j = -2 \text{ gilt} \end{aligned}$$

$$x = (2, -1, (1, 1), -2) = (2, -1, -2, (1, 1)) =$$

$$= (2, -1, -2, 1, 1) = 0.$$

Ist $i_3 = 3$, so auch $i_4 = 3$, und es folgt für

$q = 5$ ohne Einschränkung $i_3 = 3$, $i_4 = -1$. Ist

nun $j = -1$, so folgt $x = (2, -1, (3, -1), -1) =$

$$= (2, -1, 3, -1, -1) = (4, -1, -1) \text{ und fertig.}$$

Für $j = -2$ muß genauer analysiert werden. Ist

$m = -1$, so auch $n = -1$, und wie oben folgt

$$x = (4, -1, (-1, -1)) \text{ und wir sind fertig.}$$

Ansonsten können wir (es gelte weiterhin $q=5$)

$m = 1$, $n = 2$ annehmen, und es gilt

$$\begin{aligned} x &= (2, -1, (3, -1), (1, 2)) = (2, -1, (3, -1), 1, 2) = \\ &= (2, -1, 3, -1, 1, 2) = (2, -1, 3, 1, -1, 2) = 0. \end{aligned}$$

Sei daher $q > 5$. Dann ist j stets größer als 3,

für $i_3 = 3$, $i_4 = -1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= (2, -1, (3, -1), j) = (2, -1, 3, -1, j) = (4, -1, j), \\ &\text{die Behauptung. Für } i_3 > 3 \text{ ist auch } i_4 > 3, \text{ und} \\ x &= (2, -1, (i_3, i_4), j) = (1, (i_3, i_4), j) = \\ &= (i_4, 1, i_3, j) + (1, i_3, i_4, j) = \\ &= (i_4 + 1, i_3, j) + (1 + i_3, i_4, j), \text{ und alle auf-} \\ &\text{tretenden Komponenten sind entweder 0 oder} \\ &\text{größer als 3.} \end{aligned}$$

(3.1.3) $i_1 = 3$, dann $i_2 = -2$.

$$\begin{aligned} x &= (3, -2, 2, j) = (3, 2, -2, j) = (3+2, -2, j); \\ &\text{für } q = 5 \text{ ist also } x = 0, \text{ für } q > 5 \text{ sind} \\ &\text{alle auftretenden Komponenten größer als 3.} \end{aligned}$$

(3.2) $i_1 + i_2 = 2$. Dann gilt $i_3 + i_4 = 1$.

(3.2.1) $i_1 = 1$, dann auch $i_2 = 1$, und für $j = -1$ gilt

$$x = (1, 1, 1, -1) = (1, 1, -1, 1) = (1, -1, 1, 1) = 0.$$

$$\begin{aligned} &\text{Für } j = -2 \text{ folgt } x = (1, 1, 1, -2) = \\ &= (1, 1, (1, -2)) = (1, 1, -1) = 0. \end{aligned}$$

(3.2.2) $i_1 = 2$ widerspricht $i_2 \neq 0$.

(3.2.3) $i_1 = 3$, also $i_2 = -1$. Dann gilt

$x = (3, -1, 1, j) = (3, 1, -1, j) = (4, -1, j)$, und
für $q > 5$ sind wir fertig. Sei also $q = 5$.

Für $m = -1$, $n = -1$ folgt dann

$$\begin{aligned} x &= (3, -1, 1, (-1, -1)) = (3, -1, 1, -1, -1) = \\ &= (3, -1, -1, 1, -1) = (3, -1, -1, -1, 1) = 0. \end{aligned}$$

Für $m \neq -1$ können wir ohne Einschränkung
 $m = 1$, $n = 2$ annehmen, da der Fall $j = -1$
bereits bei $q > 5$ miterledigt wurde. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= (3, -1, 1, (1, 2)) = (3, -1, 1, 1, 2) = \\ &= (3, 1, -1, 1, 2) = (3, 1, 1, -1, 2) = 0. \end{aligned}$$

(3.3) $i_1 + i_2 = 3$, dann gilt $i_3 + i_4 = 0$, und es
folgt $x = 0$.

Damit ist die Behauptung in jedem auftretenden Fall
bestätigt worden. Es sei vermerkt, daß im dritten
Teil von (2.12) um Platz zu sparen bei Anwendung von
JI auftretende formale Summanden 0 weggelassen wur-
den, ebenso wie von mehreren identischen formalen
Summanden nur einer aufgeführt wurde. Es sei aber
darauf verwiesen, daß keine Rechenschritte übersprun-
gen wurden.

(2.13) Bemerkung: Der nächste Satz ist im wesentlichen der
Kreknin'sche Satz ([42]). Er ist in ([43], 10.4) recht
ausführlich, sogar in einer Verallgemeinerung, aufge-

geschrieben. Das soll für uns Grund genug sein, ihn hier nicht abzuschreiben. Ich will jedoch den Beweisgedanken skizzieren, und auf eine Überlegung hinweisen, die es ermöglicht, mit Hilfe von (2.12) das Resultat etwas zu verbessern.

(2.14) Satz: (Kreknin) Sei L eine Lie-Algebra über einem Ring, der für die Primzahl q die q -ten Einheitswurzeln enthält, und besitze L einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q . Dann gilt für die homogenen Untermoduln L_i und die in (2.11) definierten Unterhalbgebren $L_{(i)}$ von L :

$$(1) \text{ Für } 1 \leq k \leq q-1 \text{ gilt } L^{(2^{k-1})} \cap L_k \subseteq L_{(k)},$$

$$(2) \text{ Für } 1 \leq k \leq q-1, \quad \text{gilt}$$

$$L^{(2^k-1)} \subseteq L_{(k)}$$

$$(3) \quad L^{(2^{q-1}-1)} = 0.$$

Beweis: (1) und (2) werden gemeinsam durch Induktion über k bewiesen. Dabei wird der Induktionsanfang durch (2.12) abgedeckt. Seien also (1) und (2) bereits für $k-1$ bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_k \cap L^{(2^{k-1})} &= L_k \cap [L^{(2^{k-1}-1)}, L^{(2^{k-1}-1)}] \\ &\subseteq L_k \cap [L_{(k-1)}, L_{(k-1)}] \quad \text{nach (2).} \end{aligned}$$

Mit Umformungen ähnlich denen in (2.12) kann man aber $L_k \cap [L_{(k-1)}, L_{(k-1)}] \subseteq L_{(k)}$ zeigen, also (1).

Zu (2). Es gilt $L^{(2^{k-1})} = L^{(2^{k-1}+2^{k-1}-1)} =$
 $(L^{(2^{k-1})})_{(2^{k-1}-1)} \subseteq (L^{(2^{k-1})})_{(k-1)}$ nach Induktion.

Aber $(L^{(2^{k-1})})_j$ liegt für $j > k$ auch in $L_{(k)}$,
 und $(L^{(2^{k-1})})_k = L_k \cap L^{(2^{k-1})} \subseteq L_{(k)}$ nach
 dem eben bewiesenen. Somit ist auch (2) für k gezeigt.
 (3) folgt nun aus (2) nach Definition von $L_{(q-1)}$.

Von den beiden Funktionen $f(k) = 2^{k-1}$ und $g(k) = 2^{k-1}$
 wurden im Beweis aber nur folgende Eigenschaften
 benötigt. Es muß ein Induktionsanfang möglich sein,
 d.h. es muß ein $j \geq 1$ geben, so daß $L^{(f(i))} \subseteq L_{(i)}$
 und $L^{(g(i))} \subseteq L_{(i)}$ gilt für $1 \leq i \leq j$.

Und für $i \geq j+1$ muß gelten:

$$f(i) \geq 1 + g(i-1), \quad g(i) \geq g(i-1) + f(i).$$

Insbesondere erfüllen die Funktionen $f(k) = 2^{k-1}$ und
 $g(k) = 2^{k-1}$ diese Bedingungen. Setzen wir $j = 3$, be-
 nutzen wir (2.12) ganz, so können wir auch

für $i \geq 3$ $f(i) = 2^{i-2}$ und $g(i) = 2^{i-1} - 1$ wählen.

Dann erhalten wir für $q > 3$ statt (3) die Aussage

$$L(2^{q-2} - 1) = 0.$$

(2.15) Satz: Sei $q > 3$ eine Primzahl, und sei G eine Gruppe mit einem fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q . Dann ist G nilpotent von Klasse kleiner gleich $(q-1)2^{q-2}-2$.

Beweis: Nach dem Übergang zu dem assoziierten Lie-Ring der nilpotenten Gruppe G und weiter zu Lie-Algebren über Ringen, die die q -ten Einheitswurzeln enthalten, können wir den modifizierten Satz (2.14) anwenden, und das Resultat in (2.9) einsetzen. Das liefert die Behauptung.

(2.16) Bemerkung: Die Schranke aus (2.15) ist, wie ein Vergleich mit den bekannten Werten für $k(q)$ zeigt, wie diejenige von Kostrikin und Kreknin weit davon entfernt, $k(q)$ darzustellen. Meiner Ansicht nach ist eine Schranke, die aus einem Vergleich der Reihen $L^{(k)}$ und $L_{(k)}$ gewonnen wurde, dazu auch nicht in der Lage.

§ 3 Involutorische Automorphismen

(3.1) Hilfssatz: Sei G eine nilpotente Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung 2. Dann existiert ein zyklischer, α -invarianter Normalteiler von G .

Beweis: Da G nilpotent ist, ist das Zentrum $Z(G)$ verschieden von der 1, und falls α einen nichttrivialen Fixpunkt $x \in Z(G)$ besitzt, ist $\langle x \rangle$ ein zyklischer, α -invarianter Normalteiler von G . Andernfalls operiert α fixpunktfrei auf $Z(G)$, invertiert also nach ([13], 4.2) jedes Element von $Z(G)$, und für $x \in Z(G)$ ist $\langle x \rangle$ wiederum ein α -invarianter, zyklischer Normalteiler von G .

(3.2) Lemma: Sei G eine nilpotente Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung 2. Dann besitzt G einen maximalen abelschen Normalteiler, der α -invariant ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage sei falsch, dann ist der maximale abelsche α -invariante Normalteiler B von G in einem echt größeren abelschen Normalteiler B_1 von G enthalten, insbesondere gilt $B \subsetneq C_G(B)$, und auch dieser Normalteiler von G ist α -invariant.

Nach (3.1) hat die Faktorgruppe $C_G(B)/B \cap Z(G/B) \neq 1$ eine nichttriviale α -invariante zyklische Untergruppe A/B , und A ist ein α -invarianter Normalteiler von G , der B echt enthält. Da A aber in $C_G(B)$ enthalten ist, und A/B zyklisch ist, muß A abelsch sein, im Widerspruch zur Maximalität von B .

(3.3) Bemerkung: Lemma 3.2 ist in gewisser Weise eine Charakterisierung der involutorischen Automorphismen nilpotenter Gruppen. Es gilt:

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1, mit folgender Eigenschaft: Besitzt ein Automorphismus der nilpotenten Gruppe G Ordnung n , dann läßt er einen maximalen abelschen Normalteiler von G invariant. Dann ist n gleich 2.

Beweis: Sei $n \geq 2$ beliebig. Dann existiert nach ([15], Theorem, S.61) eine Primzahl q , derart, daß n die Zahl $q+1$ teilt. Daher existiert ein Automorphismus α der Ordnung n für die elementarabelsche Gruppe G der Ordnung q^2 , da die Gruppe $SL(2, q)$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung $q+1$ besitzt. Operiert nun α nicht irreduzibel auf G , so ist $G = G_1 * G_2$

ein direktes Produkt zweier α -invarianter Untergruppen der Ordnung q , auf denen α Automorphismen induziert, deren Ordnungen $q-1$ teilen. Der größte gemeinsame Teiler von $q-1$ und $q+1$ ist aber 2, also zentralisiert α^2 G_1 und G_2 , und $n = 2$.

Operiert hingegen α irreduzibel auf G , so erhält man wegen $SL(2, q) = Sp(2, q)$ nach ([10], I. 9.12; [6], Prop 4, Beweis) auf der extraspeziellen q -Gruppe H vom Exponenten q und von Ordnung q^3 einen Automorphismus β , unter dem die Frattini-Faktorgruppe $H/\phi(H) \cong G$ irreduzibel ist. β kann daher keinen der maximalen abelschen Normalteiler von H , die Ordnung q^2 besitzen und $\phi(H)$ enthalten, normalisieren. Von allen zugelassenen Zahlen n kann somit höchstens $n = 2$ die oben genannte Eigenschaft besitzen. Mit (3.2) folgt die Behauptung.

(3.4) Lemma: Sei G eine abelsche Gruppe vom Exponenten $n > 2$, und sei α der Automorphismus der Ordnung 2 von G , der G elementweise invertiert. Operiert $H = \langle G, \alpha \rangle$ treu und irreduzibel auf der auflösbaren Gruppe M , dann gilt $|M| = |C_M(\alpha)|^2$.

Beweis: Sei N ein minimaler G -invarianter Normalteiler von M . Ist N von M verschieden, gilt auch $N \neq N^\alpha$ und $N \cap N^\alpha = 1$. Aus der Irreduzibilität von M folgt nun $M = N \rtimes N^\alpha$, und $C_M(\alpha) = \{(a, a^\alpha) : a \in N\}$. Daher ist $C_M(\alpha)$ gleichmächtig zu N und die Behauptung folgt. Ist aber $N = M$, so ist M ein treuer, irreduzibler $\text{GF}(p)$ H -Modul, da M als auflösbare Gruppe charakteristische elementarabelsche p -Untergruppen für mindestens eine Primzahl p besitzt. Nach (1.10) genügt es offenbar $|M| = |C_M(\alpha)|^2$ für treue irreduzible KH -Moduln M über einem beliebigen endlichen Erweiterungskörper K von $\text{GF}(p)$ zu zeigen. Wählen wir M aber über dem Zerfällungskörper von G , so kann M wegen der Nichtabelschheit von H nach ([13], 12.2) nicht G -irreduzibel sein. Wie oben folgt also die Behauptung.

- (3.5) Bemerkung: In Lemma 3.4 wird die Tatsache benutzt, daß, wenn eine Gruppe A von Automorphismen der Gruppe M so operiert, daß A die Faktoren einer direkten Zerlegung von M regulär permutiert, die Gleichung $|M| = |C_M(A)|^{|A|}$ gilt. Operiert die Gruppe A von Automorphismen von M lediglich auf der Menge Ω der

Faktoren einer direkten Zerlegung $M = M_1 \times \cdots \times M_n$,
d.h. operiert A derart auf M , daß die Faktoren dieser
Zerlegung unter der Wirkung von Elementen aus A auf M
permutiert werden, so läßt sich $|M|$ durch $|C_M(A)|$
abschätzen, sofern sich $|\Omega|$ durch die Anzahl der
regulären A -Bahnen auf Ω abschätzen läßt. Genauer:
Gilt $|\Omega| \leq f \cdot s_\Omega(A)$ für eine natürliche Zahl f ,
so gilt $|M| \leq |C_M(A)|^f$.

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $|M_i| = |M_j|$ für alle
 i, j . Dann gilt $|M| = |M_1|^n \leq |M_1|^{f \cdot s_\Omega(A)}$. Da für das Pro-
dukt N der M_i aus einer regulären A -Bahn auf Ω stets
 $|N| = |C_N(A)|$ gilt, folgt $|M| \leq (|M_1|^{s_\Omega(A)})^f \leq |C_M(A)|^f$.

(3.6) Hilfssatz: Sei $K \neq 1$ ein Normalteiler der Gruppe H ,
und sei M ein treuer H -Modul, der als K -Modul eine
direkte Summe isomorpher K -Moduln ist. Dann sind alle
 H -Kompositionsfaktoren von M treue K -Moduln.

Beweis: Sei $M = M_1 + \dots + M_n$ die Zerlegung von
 M in isomorphe K -Moduln. Dann sind alle M_i treue
 K -Moduln und die K -Moduln $\{\tilde{M}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ mit
 $\tilde{M}_i = M_1 + \dots + M_i$ bilden eine K -Kompositionsreihe

mit treuen Kompositionsfaktoren isomorph zu M_1 .

Jede H-Kompositionsreihe von M kann aber zu einer K-Kompositionsreihe von M verfeinert werden, deren Kompositionsfaktoren nach dem Satz von Jordan-Hölder isomorph zu gewissen Kompositionsfaktoren der Reihe $\{\tilde{M}_i\}$ also zu M_1 sind, und insbesondere treu sind. Dann sind aber auch die H-Kompositionsfaktoren treue K-Moduln.

(3.7) Bemerkung: Nicht einmal für H-irreduzible Moduln M läßt sich die Aussage von (3.6) halten, wenn auf die K-Homogenität von M verzichtet wird. Als Beispiel mag die Alternierende Gruppe A_4 mit ihrer Wirkung auf einem irreduziblen dreidimensionalen Modul dienen.

(3.8) Satz: Sei G eine auflösbare Gruppe ungerader Ordnung, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung 2, und operiere das semidirekte Produkt $H = \langle G, \alpha \rangle$ treu und irreduzibel auf dem Modul M von ungerader Charakteristik. Dann gilt

$$|M| \leq |C_M(\alpha)|^3.$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über $|H|$. Nach Voraussetzung operiert α nichttrivial auf M. Falls M nicht G-irreduzibel ist, folgt $|M| = |C_M(\alpha)|^2 \leq |C_M(\alpha)|^3$ wie in (3.4), sei daher M irreduzibel unter G.

Sei $M = M_1 + \dots + M_n$ die Zerlegung von M in homogene Komponenten für den Normalteiler $[G, \alpha]$ von H .

Gelte $n > 1$, insbesondere $G > [G, \alpha]$.

Dann operiert die Faktorgruppe $H/[G, \alpha]$ transitiv auf der Menge $\Omega = \{M_1, \dots, M_n\}$, und nach (1.7) können zwei Fälle auftreten. Entweder operiert α nichttrivial auf Ω , dann gilt $|\Omega| \leq 3$ s. Ω (4.6), und mit (3.5) folgt die Behauptung. Oder α läßt alle M_i fest, was im Folgenden angenommen wird. Da die $[G, \alpha]$ -Moduln M_i unter G konjugiert sind, operiert $[G, \alpha]$ auf allen Komponenten M_i nichttrivial. Wegen $1 \neq [G, \alpha] = [G, \alpha, \alpha]$ ([16], III.43.3) induziert α auf $[G, \alpha]/C_{[G, \alpha]}(M_i) =: G_i \neq 1$ für alle i einen Automorphismus der Ordnung 2. Daher operiert $H_i = \langle G_i, \alpha \rangle$ treu auf M_i , und mit (3.6) können wir Induktion auf H_i und die H_i -Kompositionsfaktoren M_{ij} von M_i anwenden. Das ergibt $|M_{ij}| \leq |C_{M_{ij}}(\alpha)|^3$ für alle i und j . Mit (1.12) folgt die Behauptung.

Sei also $n = 1$ angenommen, M daher ein homogener $[G, \alpha]$ -Modul. Nun folgt die Behauptung mit (3.6) per Induktion, falls $G > [G, \alpha]$ gilt. Denn ist M in diesem Fall $[G, \alpha]$ -irreduzibel, so funktioniert Induktion mit $\langle [G, \alpha], \alpha \rangle$ und M , ist M aber reduzibel unter $[G, \alpha]$, so mit den Kompositionsfaktoren einer $\langle [G, \alpha], \alpha \rangle$ -Kompositionsreihe von M .

Sei daher $G = [G, \alpha]$ und M ein irreduzibler G -Modul.

Dann wird G von Elementen $[g, \alpha]$ erzeugt, die von α

invertiert werden, α invertiert also die nichttriviale, abelsche Faktorgruppe G/G' elementweise und normalisiert alle G' enthaltenden Normalteiler von G . Sei N ein maximaler Normalteiler von G , und sei $M_N = M_1 + \dots + M_n$ diesmal die Zerlegung von M in N -homogene Komponenten. Dann permutiert H/N wieder transitiv die M_i , und diesmal muß α im Falle $n > 1$ treu auf $\Omega = \{M_1, \dots, M_n\}$ operieren, da αN mit seinen Konjugierten die ganze Gruppe H/N erzeugt. Daher sind wir im Falle $n > 1$ mit (1.7) und (3.5) fertig. Für $n = 1$ operiert N treu auf jedem $\langle N, \alpha \rangle$ -Kompositionsfaktor von $M = M_1$ nach (3.6) und per Induktion ($|N| < |G|$) sind wir mit (1.12) fertig, falls α N nicht zentralisiert; zentralisiere α also N . Da α aber nicht ganz G zentralisiert, wegen $G = [G, \alpha]$ sogar keine nichttriviale Faktorgruppe G/K für α -invariante Normalteiler K von G zentralisiert, muß N im Zentrum von G liegen, da α mit N auch die Wirkung von G auf N , also die Faktorgruppe $G/C_G(N)$ zentralisiert. Nun ist $G/Z(G)$ zyklisch und G abelsch nach ([13], 1.19). Wegen $G = [G, \alpha]$ wird G von α elementweise invertiert, und mit (3.4) folgt die Behauptung.

(3.9) Bemerkung: Die Schranke $|M| \leq |C_M(\alpha)|^3$ aus Satz 3.8 kann nicht verschärft werden wie folgendes Beispiel zeigt. Sei G eine extraspezielle 3-Gruppe der Ordnung 3^3 , und sei α der Automorphismus von G , der die Frattinifaktorgruppe $G/\Phi(G)$ elementweise invertiert, und $Z(G)$ zentralisiert. Dann existiert nach ([10], §. 17.13) zu $H = \langle G, \alpha \rangle$ ein treuer, irreduzibler Modul M mit $|M| = |C_M(\alpha)|^3$. Man hat dazu die lineare Darstellung λ von $Z(G)$ nicht-trivial zu wählen ebenso wie die lineare Darstellung μ von $\langle \alpha \rangle$.

(3.10) Hilfssatz: Sei P eine p -Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(P)$ von Ordnung 2, und sei $P = [P, \alpha]$. Dann gilt:
 α invertiert $K_i(P)/K_{i+1}(P)$ elementweise, falls i ungerade ist, und α zentralisiert $K_i(P)/K_{i+1}(P)$ falls i gerade ist.

Beweis: $P = [P, \alpha]$ wird von Elementen $[x, \alpha]$ erzeugt, die von α invertiert werden. Daher wird die abelsche Faktorgruppe $K_i(P)/K_{i+1}(P)$ von i -fachen Kommutatoren $[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i]$ erzeugt, wo die x_j von α invertiert werden. Es gilt also $[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i]^\alpha = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i]^{(-1)^i}$ und die Behauptung folgt.

(3.11) Lemma: Sei G eine p -Gruppe der Klasse 3 und sei $|G'/K_3(G)| = p^n$. Dann enthält G eine Untergruppe U , so daß folgendes gilt:

$$(i) \quad U \trianglelefteq G'$$

$$(ii) \quad |G:U| \leq p^{n^2}$$

(iii) U hat höchstens Nilpotenzklasse 2.

Beweis: Sei $Z_1 := G' \cap Z(G)$, dann enthält Z_1 die Untergruppe $K_3(G)$ und es gilt $|G':Z_1| \leq p^n$. Daher existieren n Elemente $x_1, \dots, x_n$ in G mit $Z_1 = C_{G'}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$, dazu wähle man etwa zu jedem Erzeuger vZ_1 von G'/Z_1 ein Element x aus G , das v nicht zentralisiert. Sei $H = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Da wegen $|G'/K_3(G)| \leq p^n$ jedes Element modulo $K_3(G)$ höchstens p^n Konjugierte besitzt, gilt insbesondere auch $|G:C| \leq p^n$, wo $C/Z_1 = C_{G/Z_1}(x_i)$ für ein Element $x_i \in G$. Und daher gilt für $U/Z_1 = C_{G/Z_1}(H) = \bigcap_{i=1}^n C_{G/Z_1}(x_i)$ die Abschätzung $|G:U| \leq p^{n^2}$. Natürlich enthält U die Kommutatorgruppe G' , und wegen $[H, U, U] \leq [Z_1, U] = 1$ folgt mit dem Drei-Untergruppen-Lemma auch $[H, U'] = 1$, also $U' \leq C_{G'}(H) = Z_1 \leq Z(G)$. Daher hat U höchstens Nilpotenzklasse 2.

(3.12) Satz: Sei G eine p -Gruppe, und sei $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung 2 mit $|\text{C}_G(\alpha)| = p^m$. Dann gilt:

- (i) falls $p \neq 2$, so hat G eine α -invariante Untergruppe von Klasse höchstens 2 und Index höchstens $p^{1^2+2^2+\dots+m^2}$.
- (ii) falls $p = 2$, so hat G eine α -invariante abelsche Untergruppe, deren Index in G kleiner gleich $2^{h(m)}$ ist, wo $h(m)$ eine gewisse numerische Funktion ist.

Beweis: (i) Sei also p eine ungerade Primzahl. Wir verwenden Induktion über m . Falls $m = 0$, so operiert α fixpunktfrei auf G , nach (1.4, 4.4) ist G also abelsch und wir erhalten G selbst als die Untergruppe mit den gewünschten Eigenschaften. Der Index ist $1 = p^0$.

Sei daher $m > 0$, und sei für kleinere m der Satz bereits bewiesen. Gilt $G > [G, \alpha]$, so wird nach (1.12) der Abschnitt $G/[G, \alpha]$ von $\text{C}_G(\alpha)$ überdeckt, d.h. es gibt ein $0 < i \leq m$ mit $G/[G, \alpha] = p^i$ und $|\text{C}_{[G, \alpha]}(\alpha)| = p^{m-i}$. Per Induktion enthält $[G, \alpha]$ dann eine α -invariante Untergruppe U von Klasse kleiner gleich 2 und $|[G, \alpha] : U| \leq p^{1^2+\dots+(m-i)^2}$. Dieses U hat aber wegen $|G : U| \leq p^i + 1^2+\dots+(m-i)^2 \leq p^{1^2+\dots+m^2}$ alle gewünschten Eigenschaften.

Sei also $G = [G, \alpha]$. Besitzt G die Nilpotenzklasse t , so setze $s := t$ falls t ungerade ist, und $s := t+1$ falls t gerade ist. Dann invertiert α nach (3.10) $K_s(G)$ elementweise. Da wir ohne Einschränkung $s \geq 2$ annehmen können, wählen wir ein Element $x \in K_{s-1}(G) \cap \Omega(C_G(\alpha))$

Dann gilt nach (3.10) $[x, \alpha] \in K_s(G)$, und daher ist $H := \langle K_s(G), x \rangle$ eine normale, α -invariante Untergruppe von G . Nach (1.12) gilt $|C_H(\alpha)| = p$, und somit $|C_{G/H}(\alpha)| = p^{m-1}$ und per Induktion haben wir in G/H eine α -invariante Untergruppe U/H von Klasse höchstens 2 mit $|G/H : U/H| = |G : U| \leq p^{1^2 + \dots + (m-1)^2}$.

Wegen $K_3(U) \subseteq H$ gilt offenbar $K_4(U) \subseteq K_s(G)$, und $K_4(U)$ wird daher von α elementweise invertiert. Für $[U, \alpha] = [U, \alpha, \alpha]$ (siehe [6], III.3.3) gilt dann aber wegen (3.10) $K_4([U, \alpha]) = 1$, und $[U, \alpha]$ hat Nilpotenzklasse kleiner gleich 3. Sei $|U : [U, \alpha]| = p^j$, dann folgt nach (1.12) $0 \leq j \leq m$ und $|G : [U, \alpha]| \leq p^{1^2 + \dots + (m-1)^2 + j}$. Hat $[U, \alpha]$ also Klasse kleiner gleich 2, so sind wir fertig. Ansonsten erhalten wir mit (3.11) eine Untergruppe U_1 von Klasse höchstens 2 in $[U, \alpha]$, die $[U, \alpha]'$ enthält, also α -invariant ist, und Index kleiner gleich $p^{(m-j)^2}$ in $[U, \alpha]$ hat. Der Index von U_1 in G ist also beschränkt durch $p^{1^2 + \dots + (m-1)^2 + j + (m-j)^2}$ und diese Schranke läßt sich für alle zugelassenen j durch die angegebene Schranke abschätzen.

(ii) Sei $p = 2$. Dann existiert nach (3.2) ein maximaler abelscher Normalteiler A in G , der α -invariant ist. Sein Index in G soll durch eine Funktion von $|C_G(\alpha)| = 2^m$ abgeschätzt werden. Nach (1.11) gilt $|A : [A, \alpha]| \leq 2^m$. Daher liegt $\mathcal{U}_m(A)$ ganz in $[A, \alpha]$, und da α $[A, \alpha]$ elementweise invertiert, vertauscht α mit jedem Automorphismus von $\mathcal{U}_m(A)$, also zentralisiert α die Faktorgruppe $G/C_G(\mathcal{U}_m(A))$. Wieder mit (1.11) folgt $|G : C_G(\mathcal{U}_m(A))| \leq 2^m$.

α operiert auf der elementarabelschen Faktorgruppe $A/\Phi(A) = \bar{A}$, und es folgt $|\bar{A}/[\bar{A}, \alpha]| \leq 2^m$. $[\bar{A}, \alpha]$ wird aber von Elementen der Ordnung 2 erzeugt, die von α invertiert werden, also wird $[\bar{A}, \alpha]$ zentralisiert und ebenso $[\bar{A}, \alpha] \leq 2^m$. Zusammen ergibt sich $|A : \Phi(A)| = 2^{2m}$. Die Ordnung von $A/\mathcal{U}_m(A)$ ist daher kleiner gleich 2^{2m^2} , und die von G auf $A/\mathcal{U}_m(A)$ induzierte Automorphismengruppe kann (grob) durch 2^{4m^3} abgeschätzt werden. Daher hat $U := C_G(\mathcal{U}_m(A)) \cap C_G(A/\mathcal{U}_m(A))$ höchstens Index 2^{m+4m^3} in G . U operiert auf A über Homomorphismen von $A/\mathcal{U}_m(A)$ nach $\mathcal{U}_m(A)$, deren Bilder natürlich sämtlich in $\Omega_m(A)$ liegen, also über Homomorphismen von $A/\mathcal{U}_m(A)$ nach $\Omega_m(A)$.

Die Ordnung der Gruppe dieser Homomorphismen kann wieder durch 2^{4m^3} abgeschätzt werden, und somit hat $A = C_G(A)$, denn maximale abelsche Normalteiler sind selbstzentralisierend (in nilpotenten Gruppen), in G höchstens den Index 2^{m+8m^3} . Die Aussage (ii) mit $h(m) = m+8m^3$ ist somit bewiesen.

(3.13) Bemerkung: Die Klasse der nilpotenten Gruppe G selbst kann nicht durch eine Funktion von $|C_G(\alpha)|$ für einen Automorphismus α der Ordnung 2 beschränkt werden. Man betrachte etwa p -Gruppen mit einem maximalen Normalteiler, der abelsch ist, und der ein Komplement in der Gruppe besitzt. Für derartige Gruppen ist die Abbildung, die den Normalteiler elementweise invertiert und das Komplement zentralisiert, ein Automorphismus der Ordnung 2, mit p Fixpunkten. Die Nilpotenzklasse derartiger p -Gruppen kann aber beliebig groß sein. Satz 3.12 kann auch nicht dahingehend verschärft werden, daß der Index einer abelschen Untergruppe durch eine Funktion von $|C_G(\alpha)|$ beschränkt wird. Maximale abelsche Untergruppen in extraspeziellen p -Gruppen der Ordnung p^{2n+1} sind nämlich vom Index p^n . Für ungerades p besitzen extraspezielle p -Gruppen aber stets einen Automorphismus der Ordnung 2, der nur das Zentrum der Gruppe zentralisiert.

(3.14) Satz: Es existiert eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Ist G eine auflösbare Gruppe, α ein Automorphismus der Ordnung 2 von G mit $|C_G(\alpha)| = m$, dann existiert eine α -invariante Untergruppe U von Klasse höchstens 2 in G mit $|G : U| \leq f(m)$.

Beweis: Die gesuchte Funktion f wird das Produkt von vier Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 sein, die die Ordnungen von $G/O_{2,2}(G)$, $O_{2,2}(G)/F(G)O_{2,2}(G)$, $F(G)O_{2,2}(G)/F(G)$ sowie den Index einer Klasse-2-Untergruppe U in $F(G)$, die α -invariant ist, abschätzen. Sei $m = \prod_{p|m} p^{e_p} = |C_G(\alpha)|$ die Zerlegung der natürlichen Zahl m in ein Produkt von Primzahlpotenzen.

Sei $g_1(m) := |GL(2e_2, 2)|$ und $g_2(m) := \prod_{p|m} |GL(2e_p, p)|$.

(i) Der Automorphismus α operiert auf der charakteristischen Untergruppe $O_{2,2}(G)$ und für $O_{2,2}(G)/N$ mit $N/O_{2,2}(G) = \Phi(O_{2,2}(G)/O_{2,2}(G))$ erhalten wir durch zweimaliges Anwenden von (1.11) wie im Beweis von (3.12) $|O_{2,2}(G)/N| \leq 2^{2e_2}$. Die Faktorgruppe $G/O_{2,2}(G)$ operiert nach (133, 6.14) treu auf diesem Vektorraum über $GF(2)$, kann also in $GL(2e_2, 2)$ eingebettet werden, und die Behauptung folgt, wenn wir f_1 gleich g_1 setzen.

(ii) f_2 kann als $g_2(m) \cdot 2^{h(e_2)+2e_2}$ gewählt werden.

Der Automorphismus α der Ordnung 2 operiert auf der Menge der 2-Sylowgruppen von $O_{2,2}(G)$ und läßt eine davon, etwa S , invariant. Nach (1.1) und (1.3) folgt wegen $F(G) \leq O_{2,2}(G)$, daß $F(G)O_{2,2}(G) = O_{2,2}(G)C_S(F(O_{2,2}(G)))$ ist, und somit gilt $|O_{2,2}(G) : F(G)O_{2,2}(G)| = |S/C_S(F(O_{2,2}(G)))|$. Diese 2-Gruppe $\bar{S}$ operiert treu auf $F(O_{2,2}(G))$, und daher nach ([4], 5.1.4) auch treu auf dem direkten Produkt der Frattini-Faktorgruppen der Sylowgruppen von $F(O_{2,2}(G))$.

Nach (3.12) existiert in $\bar{S}$ eine α -invariante abelsche Untergruppe A von Index kleiner gleich $2^{h(e_2)}$. Darin ist die Untergruppe $[A, \alpha]$, die von α elementweise invertiert wird, vom Index höchstens 2^{e_2} enthalten, und deren Sockel liegt im Zentralisator von α in A , hat also höchstens 2^{e_2} Elemente. Zerlegt man die abelsche 2-Gruppe $[A, \alpha]$ also in das direkte Produkt einer elementarabelschen Untergruppe R und einer Untergruppe T , die $\Omega(T) \leq U(T)$ erfüllt, so ist der Index von T in $\bar{S}$ durch $2^{h(e_2)+2e_2}$ beschränkt. Der Automorphismus α normalisiert T und $M := F(O_{2,2}(G))/\phi(F(O_{2,2}(G)))$, daher operiert das semidirekte Produkt $\langle T, \alpha \rangle$ auf M , wobei die Operation

von T treu ist. Nach dem Satz von Maschke ist M vollständig reduzibel für die Gruppe $\langle T, \alpha \rangle$. Sei $M = M_1 + \dots + M_n$ eine Zerlegung von M in $\langle T, \alpha \rangle$ -irreduzible Untergruppen. Dann gilt für die Faktoren

$$M_i: \bigcap_{j=1}^n C_T(M_j) = C_T(M) = 1.$$

Es gilt aber sogar
$$C_T(M_i) = 1.$$

Denn angenommen, es existiert ein Element $1 \neq x$ aus diesem Durchschnitt. Dann existiert auch eine

Involution y in $\bigcap_{i=1}^n C_T(M_i)$. Wegen $\bigcap_{i=1}^n C_T(M_i) = 1$

finden wir ein k , $1 \leq k \leq n$, mit $y \notin C_T(M_k)$. Daher gilt auch $[\Omega(T), M_k] \neq 1$, ein Widerspruch, da y alle M_i mit dieser Eigenschaft zentralisiert.

Nun können wir aber T nach ([13], 4.44) in das direkte Produkt der $T/C_T(M_i)$ einbetten, wo $[\Omega(T), M_i] \neq 1$ gilt, und die Ordnung dieses direkten Produkts ist durch das Produkt der Ordnungen der entsprechenden $\text{Aut}(M_i)$ beschränkt. Für die M_i mit $[\Omega(T), M_i] \neq 1$ gilt aber $|M_i| = |C_{M_i}(\alpha)|^2$, da nach Wahl die Exponenten der Faktorgruppen $T/C_T(M_i)$ größer als 2 sind. Daher können wir (3.4) anwenden. Faßt man die M_i mit $[\Omega(T), M_i] \neq 1$, die p -Gruppen für das gleiche p sind, zu p -Komponenten zusammen,

so sind die Ordnungen dieser p -Komponenten nach (1.12) höchstens p^{2e_p} . Die Ordnung von T ist also durch $g_2(m)$ beschränkt, und die Ordnung von $\bar{S}$ wie behauptet durch $g_2(m) \cdot 2^{h(e_2)+2e_2}$.

(iii) $f_3(m) = m g_3(m)$, wo $g_3(m) = \prod_{p|m} |GL(3e_p, p)|$.

Nach (1.1) haben wir $|F(G)O_2(G)/F(G)| = |O_2(G)/F(O_2(G))|$ abzuschätzen. Sei $H := O_2(G)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\phi(F(H)) = 1$ gilt, denn wegen (1.12) gilt $g_3(|C_H/\phi(F(H))(\alpha)|) \leq g_3(m)$.

Sei $K := [H, \alpha]$, dann gilt $|H : K| \leq m$, und wir sind fertig, falls $K \leq F(H)$. Ansonsten operiert die nicht-triviale Faktorgruppe $KF(H)/F(H)$ treu auf $F(H)$, welches nach ([6], III.4.5) direktes Produkt minimaler Normalteiler $M_i \leq H$ ist. Sei $K \not\leq F(H)$, dann zentralisiert α nicht ganz $F(H)$ und mit (1.3) ist $F(H) = F(\langle H, \alpha \rangle)$ und $F(H)$ ist sogar direkte Summe $\langle H, \alpha \rangle$ -irreduzibler Untergruppen. $KF(H)/F(H)$ ist daher einbettbar in das Produkt $\prod \text{Aut}(M_i)$, wo die M_i irreduzible $\langle H, \alpha \rangle$ -Moduln ungerader Charakteristik sind, für die $K \not\leq C_H(M_i)$ gilt. Mit (3.8) folgt daher $|M_i| \leq |C_{M_i}(\alpha)|^3$, und $|KF(H)/F(H)|$ ist durch $g_3(m)$ beschränkt.

(iv) $f_4(m) = 2^{h(e_2)} \cdot \prod_{p|m} p^{1^2 + \dots + e_p^2}$.

Für die charakteristischen p -Sylowgruppen P von $F(G)$, wo p die Zahl m teilt, gilt $|C_P(\alpha)| \leq p^{e_p}$. Daher gilt nach (3.12): es existiert eine α -invariante Untergruppe U_p in P , deren Klasse höchstens 2 ist, und für die $|P : U_p| \leq p^{1^2 + \dots + e_p^2}$ im Falle $p > 2$, und $|P : U_2| \leq 2^{h(e_2)}$ im Falle $p = 2$ gilt. Das Produkt über alle P , wo p die Zahl m nicht teilt, wo also α fixpunktfrei auf P operiert und dieses notwendigerweise abelsch ist, und alle U_p , wo p die Zahl m teilt, ist offenbar eine α -invariante Untergruppe von $F(G)$, die höchstens Klasse 2 besitzt. Ihr Index ist aber gleich dem Produkt der Indices $|P : U_p|$, wo p die Zahl m teilt. Das ergibt die Behauptung.

(3.15) Bemerkung: Wie in [7] gezeigt wird, kann auf die Auflösbarkeit von G in (3.14) verzichtet werden. Mit einem Satz von Fong ([3]) wird der allgemeine Fall auf den Fall auflösbarer Gruppen zurückgeführt.

§ 4 Automorphismen von Primzahlordnung, allgemeiner Fall

(4.1) Lemma: Sei $G = A\langle x \rangle$ das semidirekte Produkt der abelschen normalen Untergruppe A mit der zyklischen Untergruppe $\langle x \rangle$ der Ordnung q , prim. Sei V eine elementarabelsche p -Gruppe für eine von q verschiedene Primzahl p , und operiere G auf V derart, daß $V = [V, [A, x]]$ gilt. Dann gilt $|V| = |C_V(x)|^q$.

Beweis: Wir können offenbar $V \neq 1$ annehmen, und wegen (1.10) können wir ferner annehmen, daß V ein kG -Modul ist, wo k ein endlicher Körper der Charakteristik p ist, der Zerfällungskörper für G ist.

Sei $A = P \rtimes Q$, wo P die p -Sylowgruppe, Q das p -Komplement von A ist. Es gilt $V = [V, [Q, x]]$; denn sei $[V, [Q, x]] \neq V$, dann ist $[V, [Q, x]]$ ein echter kG -Untermodul von V , und als solcher in einem maximalen Untermodul W von V enthalten. Der Faktormodul V/W ist als irreduzibler Modul in Charakteristik p für $[P, x]$ trivial, ebenso nach Wahl von W für $[Q, x]$, daher gilt $[V, [A, x]] = [V, [P, x][Q, x]] = [V, [P, x]] + [V, [Q, x]] \leq W$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher können wir annehmen, daß G eine p' -Gruppe, und somit V vollstän-

dig reduzibel ist. Für jeden irreduziblen kG -Untermodul X von V gilt dann ebenfalls $X = [X, [A, x]]$, und induktiv können wir annehmen, daß V irreduzibel ist. Sei $V_A = V_1 + \dots + V_n$ die Zerlegung von V in homogene A -Komponenten. Dann kann nicht $n = 1$ gelten, denn da A auf einem homogenen Untermodul von V durch skalare Multiplikationen operiert, müßte x in diesem Falle die Faktorgruppe $A/C_A(V)$ zentralisieren, was den Widerspruch $V = [V, [A, x]] = 1$ ergibt. Also permutiert $\langle x \rangle \cong G/A$ transitiv die homogenen Komponenten V_i , und es gilt $n = q$, und aus (3.5) folgt die Behauptung.

- (4.2) Lemma: Sei $G = H\langle x \rangle$ das semidirekte Produkt der normalen p -Untergruppe H von Nilpotenzklasse kleiner gleich 2 mit der Gruppe $\langle x \rangle$ von Primzahlordnung $q \neq p$. Gelte $\exp(H/Z(H)) = p$ und $H = [H, x] \neq 1$. Sei k ein Zerfällungskörper der Charakteristik r für G , wo $(r, |G|) = 1$, und sei V ein treuer irreduzibler kG -Modul. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:
- (a) $\dim_k V = q \dim_k (C_V(x))$
 - (b) H ist extraspeziell, $Z(H) = Z(G)$, und $|H|$ ist beschränkt durch eine Funktion $g(d, q)$ von q und $d := \dim_k (C_V(x))$.

Beweis: Sei $Z := Z(H)$, und sei $V_Z = V_1 + \dots + V_n$ die Zerlegung von V in homogene Z -Komponenten.

H läßt offenbar alle Komponenten invariant, gilt daher $n > 1$, so muß $\langle x \rangle \cong G/H$ die Komponenten transitiv permutieren und es gilt (a).

Sei also $n = 1$. Dann operiert Z auf V durch skalare Multiplikation und $[Z, G] \subseteq C_G(V) = 1$, also $Z = Z(G)$.

Nach Voraussetzung kann nun H nicht abelsch sein.

Es gilt nach ([4], 5.2.3) $H/H' = [H/H', x] \rtimes C_{H/H'}(x) = [H, x]H'/H' \rtimes C_{H/H'}(x)$, und daher operiert x auf H/H' fixpunktfrei, und $Z \leq H'$, also $Z(H) = H'$. Da die Faktorgruppe $H/Z(H)$ vom Exponenten p ist, so auch H' , und H ist extraspeziell. Sei $|H| = p^{2m+1}$.

Dann hat V nach ([6], V.12.13) Dimension p^m , und die reguläre Darstellung von $\langle x \rangle$ tritt mindestens $p^{m+1}/q - 1$ mal auf, also $q(d+1)-1 \geq p^m$. Damit ergibt sich $|H| = p^{2m+1} \leq (p^m)^3 \leq (qd+q-1)^3$.

(4.3) Satz: Sei G eine auflösbare Gruppe, die einen Automorphismus α von Primzahlordnung q zuläßt, und sei $|C_G(\alpha)| = m$. Dann ist $|G/F(G)| \leq f(m, q)$, wo f eine Funktion ist, die lediglich von m und q abhängt.

Beweis: Induktion über m .

Wie in (3.14) können wir annehmen, daß $\bar{G} = G/F(G)$ nilpotent ist, indem wir uns auf $F_2(G)/F(G)$ zurückziehen, welches in $G/F(G)$ selbstzentralisierend ist. Nach ([4], 5.3 A) enthält $\bar{G}$ eine "kritische Untergruppe", das heißt eine charakteristische Untergruppe $\bar{C}$ von Klasse kleiner gleich 2 mit $C_{\bar{G}}(\bar{C}) = Z(\bar{C})$, und $\bar{C}/Z(\bar{C})$ ist ein direktes Produkt von elementarabelschen Gruppen. Offenbar genügt es, $|\bar{C}|$ zu beschränken, sei also $G = C$. Induktiv können wir auch $\Phi(F(G)) = 1$ annehmen, sei also $F(G)$ das direkte Produkt minimaler Normalteiler von $G_1 = G\langle\alpha\rangle$. Diese sind nunmehr elementarabelsch, und somit können wir mit (5.7) $|O_q(G)|$ abschätzen und Induktion auf $C_G(O_q(G))$ anwenden, falls $O_q(G) \neq 1$. Sei also $O_q(G) = 1$, also $F(G)$ eine q' -Gruppe.

Sei $\bar{Q} = Q/F(G)$ die q -Sylowgruppe von $G/F(G)$. Wir werden $|\bar{Q}|$ beschränken, und dazu brauchen wir offenbar wieder nur $|\bar{B}|$ zu beschränken, wenn $\bar{B}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\bar{Q}$ ist; wir können uns also auf ein abelsches $\bar{Q}$ zurückziehen, da stets ein α -invariantes $\bar{B}$ gefunden werden kann. Ja, wegen (1.11) brauchen wir sogar nur $|\bar{Q}, \alpha|$ zu beschränken.

Sei W eine $\bar{Q}\langle\alpha\rangle$ -irreduzible Untergruppe von $F(G)$, die von $[\bar{Q}, \alpha]$ nicht zentralisiert wird. Dann gilt

$W = [W, [\bar{Q}, \alpha]]$, und mit (4.1) folgt $|W| = |C_W(\alpha)|^q$.
 $F(G)$ ist aber als $\bar{Q}\langle\alpha\rangle$ -Modul vollständig reduzibel,
 und $[\bar{Q}, \alpha]$ kann eingebettet werden in das direkte Pro-
 dukt der Automorphismengruppen solcher $\bar{Q}\langle\alpha\rangle$ -irreduzib-
 ler Untermoduln, die von $[\bar{Q}, \alpha]$ nicht zentralisiert
 werden. Die Ordnung dieses Produktes ist aber nach dem
 eben Gesagten beschränkt durch eine Funktion von $|C_{F(G)}(\alpha)|$.
 Das ergibt eine Schranke für $|[\bar{Q}, \alpha]|$.

Daher können wir im Folgenden annehmen, G sei eine
 q' -Gruppe. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(i) Für jede minimale normale Untergruppe W von G_1 , die
 in $F(G)$ enthalten ist und $W = [W, G]$ erfüllt,
 gelte $|W| = |C_W(\alpha)|^q$.

Sei W^* das Produkt aller dieser W . Dann gilt
 $|W^*| = |C_{W^*}(\alpha)|^q \leq m^q$, und da $\bar{G}$ treu auf W^*
 operiert, haben wir $|\bar{G}|$ abgeschätzt.

(ii) Die minimale normale Untergruppe W von G_1 ist in
 $F(G)$ enthalten und erfüllt $W = [W, G]$, aber nicht
 $|W| = |C_W(\alpha)|^q$. Sei W eine elementarabelsche r -Grup-
 pe.

Dann existiert für eine gewisse Primzahl $p \neq r$
 eine p -Sylowgruppe $\bar{P}$ von $\bar{G}$ mit $[W, \bar{P}] \neq 1$, also
 $W = [W, \bar{P}]$. Gilt nun $[\bar{P}, \alpha] < \bar{P}$, so auch $[G, \alpha] < G$,
 und wir sind mittels Induktion fertig, da $G/[G, \alpha]$

durch m beschränkt ist, und α auf $[G, \alpha]$ wegen der Teilerfremdheit einen echt kleineren Zentralisator besitzt. Sei also $[\bar{P}, \alpha] = \bar{P}$.

Dann fassen wir W als einen $\bar{P}\langle\alpha\rangle$ -Modul über $GF(r)$ auf, und können wegen (1.10) wieder zu einem Zerfällungskörper k für $\bar{P}\langle\alpha\rangle$ übergehen. W ist vollständig reduzibel. Daher existiert in W auch ein irreduzibler $k\bar{P}\langle\alpha\rangle$ -Untermodul W_1 mit $\dim_k W_1 \neq q \dim_k C_{W_1}(\alpha)$.

Nun folgt aus $W = [W, \bar{P}]$ auch $W_1 = [W_1, \bar{P}]$ und daher ist $\bar{P}/C_{\bar{P}}(W_1) \neq 1$. Mit (4.2) folgt daher:

$\bar{P}/C_{\bar{P}}(W_1)$ ist extraspeziell von Ordnung höchstens $g(d, q)$, wo $d = \dim_k C_{W_1}(\alpha)$, und α zentralisiert das Zentrum dieser extraspeziellen Gruppe. Somit enthält G eine normale Untergruppe L mit $G/L \cong \bar{P}/C_{\bar{P}}(W_1)$ deren Ordnung über $F(G) = F(L)$ per Induktion durch $f(|C_L(\alpha)|, q)$ beschränkt ist, da $|C_L(\alpha)| < |C_G(\alpha)|$ nach (1.12) gilt, und deren Index in G durch $g(m, q)$ beschränkt ist. Dies liefert die gewünschte Schranke.

(4.4) Satz: Sei G eine auflösbare Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Primzahlordnung q , und sei $|C_G(\alpha)| \leq 2$. Dann gilt $|G/F(G)| \leq 2^q - 1$, oder q ist eine Fermatsche Primzahl, $q = 2^m + 1$, und $|G/F(G)| \leq \max \{2^q - 1, 2^{2m+1}\}$.

Beweis: Nach dem Satz von Thompson [47] gilt $G = F(G)$, falls α fixpunktfrei auf G operiert, wir nehmen daher an, daß $|C_G(\alpha)| = 2$ gilt. Dann sind die 2-Sylowgruppen von G nichttrivial, und G ist nach ([2], Theorem B, S.548) 2-abgeschlossen oder 2-nilpotent, wenn $q > 2$ gilt. Per Induktion können wir $Z(G) = \bigoplus(F(G)) = 1$ annehmen.

1. Fall: $O_2(G) = 1$. Dann ist $F(G)$ eine abelsche 2'-Gruppe, auf der α fixpunktfrei operiert, und für $q = 2$ invertiert α $F(G)$ elementweise, zentralisiert daher $G/C_G(F(G)) = G/F(G)$, und mit (1.11) folgt $|G/F(G)| \leq 2$. Sei q ungerade, also $(|\alpha|, |G|) = 1$, und sei $S \in \text{Syl}_2(G)$ α -invariant. Gilt nun für eine α -invariante Untergruppe U von S $U > [U, \alpha]$, so operiert α fixpunktfrei auf der Gruppe $F(G)[U, \alpha]$, und $[U, \alpha] \leq C_G(F(G)) \cap S = 1$, also $U = C_G(\alpha)$. Gilt daher $S > [S, \alpha]$, so folgt $|S| = 2$, und wir sind wegen $G/F(G) = SF(G)/F(G) \cong S/S \cap F(G) \cong S$ fertig. Wir können also $S = [S, \alpha]$ annehmen. Da α aber nach ([4], 5.2.3) und obiger Bemerkung jede charakteristische abelsche Untergruppe von S zentralisiert, ist S nach ([10], III.13.6) eine spezielle 2-Gruppe, wegen $|Z(S)| = |C_S(\alpha)| = 2$ sogar eine extraspezielle 2-Gruppe der Ordnung 2^{2m+1} ,

$m \geq 1$. Sei $1 \neq X \leq F(G)$ nun ein minimaler α -invarianter Normalteiler von G . Dann erfüllt auch das semidirekte Produkt XS die Voraussetzungen des Satzes, und falls $X \neq F(G)$, folgt per Induktion die gewünschte Abschätzung für $|XS/F(XS)|$. Operiert nun S treu auf X , so gilt $X = F(XS)$ und wir sind fertig. Ansonsten zentralisiert aber $Z(S)$ ganz X , und $O_2(XS) \neq 1$. Dann ist aber XS 2-abgeschlossen, und $[S, X] = 1$, also $X \leq Z(G)$, im Widerspruch zu $Z(G) = 1$. Daher ist $F(G) = O_p(G)$ ein irreduzibler $\langle S, \alpha \rangle$ -Modul für eine ungerade Primzahl $p \neq q$. Insbesondere ist $O_p(G)$ für $\langle S, \alpha \rangle$ vollständig reduzibel und $Z(S)$ operiert fixpunktfrei auf $O_p(G)$. Nach (1.10) operieren dann auch α und $Z(S)$ fixpunktfrei auf $O_p(G) \otimes_{GF(p)} K$, wo K ein beliebig großer, endlicher Erweiterungskörper von $GF(p)$ ist, und wir erhalten aus ([16], V.17.13) die Behauptung $q = 2^m + 1$.

2. Fall: $O_2(G) \neq 1$. Dann ist $G/O_2(G)$ eine nilpotente 2'-Gruppe, die wegen $Z(G) = 1$ treu auf $O_2(G)$ operiert. Jeder minimale α -invariante Normalteiler Y von $O_2(G)$ enthält aber $C_G(\alpha)$, denn ansonsten würde α auf dem semidirekten Produkt YH von Y mit einer α -invarianten 2'-Hallgruppe H von G fixpunktfrei operieren, und es folgte $Y \leq O_2(G) \cap C_G(H) \leq Z(G) = 1$.

Da $O_2(G)$ im Falle $q = 2$ von Ordnung 4 ist nach (5.7), sind wir in diesem Falle fertig, denn hier ist $|H|$ ein Teiler von 6 und $|G/O_2(G)| \neq 3 = 2^2 - 1$. Sei also q wieder ungerade. Dann ist aber $O_2(G)$ vollständig reduzibel für $\langle H, \alpha \rangle$, und muß nach dem eben Gesagten sogar irreduzibel sein. Mit ([6], VI, 8.4) sind wir fertig, wenn wir $|O_2(G)| = 2^q$ zeigen können. Wir betrachten wieder $O_2(G) =: V$ als $GF(2)\langle H, \alpha \rangle$ -Modul und tensorieren V mit einem Zerfällungskörper für $\langle H, \alpha \rangle$ in Charakteristik 2. Auch der so entstandene Modul V^* ist vollständig reduzibel für $\langle H, \alpha \rangle$, und eine Wiederholung der obigen Argumentation unter Benutzung von (1.10) für α sowie für alle Elemente von H , zeigt, daß V^* irreduzibel für $\langle H, \alpha \rangle$ ist. Die Einschränkung auf H kann nun aber nicht homogen sein, da α keinen Abschnitt von H , also auch nicht $Z(H)$ zentralisiert. Daher ist V^* induziert von einem notwendigerweise 1-dimensionalen H -Untermodul. Es gilt daher $\dim V^* = q$, und wir erhalten $|V| = 2^q$.

(4.5) Beispiel: (a) Da $SL(2,5)$ eine zu $SL(2,3)$ isomorphe Untergruppe besitzt, existiert eine zerfallende Erweiterung H einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 25

mit der Quaternionen Gruppe der Ordnung 8 mit folgenden Eigenschaften:

$|H/F(H)| = 8$, und H besitzt einen Automorphismus α der Ordnung 3 mit $|C_H(\alpha)| = 2$.

(b) Ein Sylow-7-Normalisator in $GL(3,2)$ ist nichtabelsch der Ordnung 21. Daher existiert eine zerfallende Erweiterung K einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 8 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 7 mit folgenden Eigenschaften:

$|K/F(K)| = 7$, und K besitzt einen Automorphismus α der Ordnung 3 mit $|C_K(\alpha)| = 2$.

(4.6) Lemma: Sei L eine metabelsche Lie-Algebra über einem Ring der Charakteristik p , der die q -ten Einheitswurzeln enthält, $p \neq q$ prim. Sei $\alpha \in \text{Aut}(L)$ von Ordnung q , mit $|C_L(\alpha)| = m$ und α operiere fixpunktfrei auf L/L^2 . Sei $c(L) = n$ mit $2q \leq n \leq 4q$; dann ist der Index von $C_L(L^{n-1})$ in L durch eine Funktion von m und q beschränkt.

Beweis: Sei $\tilde{C} := \bigcap_{i=2}^{n-1} C_L(\langle L_0 \cap L^i, L^{i+1} \rangle / L^{i+2})$.

Dann gilt $\tilde{C} \leq C_L(L^{n-1})$.

Sei dazu $z \in \tilde{C}$, $v \in L^{n-1}$, wir haben $[v, z] = 0$ zu zeigen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $v = [v_1, \dots, v_{n-1}]$ als ein $(n-1)$ -faches Produkt von homogenen Elementen aus L annehmen, deren Gewichte sämtlich von $\bar{0}$ verschieden sind, da nach Voraussetzung $L_0 \subseteq L^2$ gilt. Das Gewichtstupel $x = (i_1, \dots, i_{n-1})$ von v hat die Eigenschaft, daß entweder $i_1 + \dots + i_{q+2} = 0$ gilt, oder eine Permutation der Ziffern $\{q+3, \dots, n-1\}$, $\sigma \in \text{Sym}\{q+3, \dots, n-1\}$, existiert mit $-(i_1 + \dots + i_{q+2}) = i_{(q+3)\sigma} + \dots + i_{k\sigma}$ für ein $k \in \{q+3, \dots, n-1\}$. Das folgt aus (2.2) wegen $(n-1) - (q+2) \geq q-1$ nach Voraussetzung. Für den Faktor $v' = [v_1, \dots, v_{q+2}]$ oder $v'' = [v_1, \dots, v_{q+2}, v_{(q+3)\sigma}, \dots, v_{k\sigma}]$ von v gilt dann nach Wahl des Elements z : $[v', z] \in L^{q+4}$ bzw. $[v'', z] \in L^{k+2}$, in beiden Fällen folgt wegen $L^{(2)} = 0$ nun $[v, z] \in L^{n+1} = 0$.

Offenbar genügt es nun zu zeigen, daß $|L : \tilde{C}|$ durch eine Funktion von m und q beschränkt ist. Wegen $n \leq 4q$ genügt es sogar $|L : C_L(\langle L_0 \cap L^i, L^{i+1} \rangle / L^{i+2})|$ für alle i mit $q+2 \leq i \leq n-1$ zu beschränken, sei daher $i \in \{q+2, \dots, n-1\}$ und sei $D := C_L(\langle L_0 \cap L^i, L^{i+1} \rangle / L^{i+2})$. Da D α -invariant ist, und $L_0 \subseteq L^2 \subseteq D$ für alle solchen D gilt, haben wir letztlich nur $|L_j : D_j|$ durch eine Funktion von m und q abzuschätzen, wo $j \neq 0$. Sei $\mathcal{W}$ eine Menge von i -fachen Produkten homogener Elemente aus L , die $\langle L_0 \cap L^i, L^{i+1} \rangle$ modulo L^{i+1} erzeugen.

$\mathcal{W}$ sei minimal hinsichtlich dieser Eigenschaft gewählt.

Dann haben diese Produkte Gewicht 0, ihre Faktoren besitzen von 0 verschiedenes Gewicht, und die Mächtigkeit von $\mathcal{W}$ ist höchstens m . Sei $y = [y_1, \dots, y_i]$ ein Element aus $\mathcal{W}$. Dann finden wir wegen $i \geq q+2$ und (2.2) eine Permutation σ der Komponenten $y_3, \dots, y_i$ so daß der Faktor $y' = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_i]$ von $y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_i]$ Gewicht $-j$ besitzt für ein r zwischen 3 und i .

L_j operiert nun aber auf dem Faktor $\langle y', L^{r+1} \rangle / L^{r+2}$ durch Homomorphismen von $\langle y' \rangle$ in $\langle L_0 \cap L^{r+1} \rangle / L^{r+2}$, und da dieser letzte Faktor eine durch m beschränkte Ordnung hat, so auch der Faktor $L_j / C_{L_j}(\langle y', L^{r+1} \rangle / L^{r+2})$.

Die Elemente dieses Zentralisators zentralisieren aber offenbar auch das Element y modulo L^{i+2} .

Bildet man den Schnitt über die entsprechenden Zentralisatoren aller Elemente aus $\mathcal{W}$, so hat wegen $|\mathcal{W}| \leq m$ dieser Schnitt E einen Index in L_j , der durch eine Funktion von m beschränkt ist. Da E aber offensichtlich in D_j liegt, haben wir hiermit auch $|L_j : D_j|$ abgeschätzt.

(4.7) Korollar: Sei G eine metabelsche p -Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung q , $q \neq p$ prim. Operiere α fixpunktfrei auf G/G' und gelte $|C_G(\alpha)| = m$. Sei G nilpotent von Klasse n mit $2+2q \leq n \leq 4q$. Dann besitzt G eine α -invariante Untergruppe U von Klasse kleiner gleich $n-1$, deren Index in G durch eine Funktion $g(m,q)$ von m und q beschränkt ist.

Beweis: Von der metabelschen p -Gruppe G gehen wir wie in § 2 über zu dem assoziierten Lie-Ring L von G , der eine Lie-Algebra über dem endlichen Ring $\mathbb{Z}/\exp(G)\mathbb{Z}$ ist. Zu diesem wählen wir wie in ([9], Lemma 7, S. 323) den kleinsten Erweiterungsring R , der die q -ten Einheitswurzeln enthält, und bilden $L^* = L \otimes_{\mathbb{Z}/\exp(G)\mathbb{Z}} R$. Dann ist auch L^* endlich und es gilt $|C_{L^*}(\alpha)| \leq m^q$. Die Voraussetzungen des Korollars übertragen sich entsprechend auf die Lie-Algebra L^* , und daher folgt aus (4.6), daß $C_{L^*}(L^{n-1})$ einen durch eine Funktion von m und q beschränkten Index in L^* besitzt. Wie man leicht sieht gilt $C_{L^*}(L^{n-1}) = C_L(L^{n-1}) \otimes R$, und daher ist auch der Index von $C_L(L^{n-1})$ in L durch eine Funktion von m und q beschränkt. $D = C_L(L^{n-1})$ hat aber wegen $D^n \subseteq L^{n+1} = 0$ höchstens Klasse $n-1$, und dasselbe gilt auch für die von den Urbildern der Erzeuger von D in

G erzeugten Untergruppe U . Diese ist zudem α -invariant und hat den gewünschten Index in G .

(4.8) Satz: Sei G eine metabelsche p -Gruppe, $\alpha \in \text{Aut}(G)$ von Ordnung q , wo q und p verschiedene Primzahlen sind. Sei $|C_G(\alpha)| = p^m$. Dann besitzt G eine α -invariante Untergruppe U , deren Klasse kleiner $\neq$ gleich $2q+1$ ist, und deren Index in G durch eine Funktion $h(p^m, q)$ von p^m und q beschränkt ist.

Beweis: Wir beweisen die Existenz einer solchen Funktion $h(p^m, q)$ durch Induktion über m . Nach (2.5) kann dabei $h(1, q) = 1$ gesetzt werden. Sei daher $m > 0$, und sei für $0 \leq i < m$ bereits $h(p^i, q)$ bekannt. Setze $f(p^m, q) := \max\{p^{m-i}h(p^i, q), 0 \leq i \leq m-1\}$, dann sind wir fertig, falls eine Untergruppe V von G existiert, die α -invariant ist, die $V > [V, \alpha]$ erfüllt, und deren Index in G durch eine Funktion $k(p^m, q)$ beschränkt ist. Denn dann leistet $h(p^m, q) = f(p^m, q)k(p^m, q)$ das Verlangte. Dazu braucht man nur Induktion auf $[V, \alpha]$ anzuwenden. ($\star$)

Sei nun s so gewählt, daß α fixpunktfrei auf $K_{s+1}(G)$ operiert, daß aber $K_s(G) \cap C_G(\alpha) \neq 1$ gelte.

Sei $y \in K_S(G) \cap C_G(\alpha)$ so gewählt, daß $y^{p^m} \in K_{s+1}(G)$, also $y^{p^m} = 1$, aber $y \neq 1$ gilt. Dann ist $N := \langle y, K_{s+1}(G) \rangle$ ein α -invarianter Normalteiler von G , und auf der Faktorgruppe G/N hat α nach (1.12) genau p^{m-1} Fixpunkte. Daher existiert per Induktion eine Untergruppe U_1/N von G/N von Klasse höchstens $2q+1$ und durch $h(p^{m-1}, q)$ beschränkten Index in G/N , die α -invariant ist. Wir können nach (*) annehmen, daß $U_1 = [U_1, \alpha]$ gilt. Dann induziert α aber auf dem semidirekten Produkt von $K_{s+1}(G)$ mit U_1/U_1' einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung q , und mit (2.5) folgt $[K_{s+1}(G), \underbrace{U_1, \dots, U_1}_{q-1}] = 1$. Da aber $K_{2q+2}(U_1) \subseteq N$, also $K_{2q+3}(U_1) \subseteq K_{s+1}(G)$ gilt, folgt $c(U_1) \leq 3q+1$. Korollar (4.7) sichert daher die Existenz einer α -invarianten Untergruppe U_2 in U_1 , deren relativer Index durch $g(p^m, q)$ beschränkt, und deren Klasse entweder $2q+1$ oder um 1 kleiner als die von U_1 ist. Die q -fache Anwendung von (4.7) oder (*) führt in jedem Fall zu einer Untergruppe U von Klasse kleiner gleich $2q+1$, die α -invariant ist, und deren Index in G $h(p^{m-1}, q)f(p^m, q)(g(p^m, q))^q$ nicht übersteigt. Dieser Wert kann als $h(p^m, q)$ definiert werden.

§ 5 Automorphismengruppen vom Typ $(2,2)$

(5.1) Hilfssatz: Sei G eine nilpotente Gruppe, A eine elementarabelsche 2-Gruppe, die auf G operiert. Dann besitzt G einen zyklischen Normalteiler, der A -invariant ist.

Beweis: Da $Z(G)$ nichttrivial und A -invariant ist, und da jede Untergruppe von $Z(G)$ normal in G ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß G abelsch ist. Wir verwenden Induktion über die Ordnung der Gruppe A , dabei wird der Induktionsanfang durch (3.1) abgedeckt. Sei daher $|A| > 2$, und sei $A = \langle x \rangle + A_1$ eine direkte Zerlegung von A , wo $x \in A^*$ beliebig von eins verschieden gewählt sei. Dann hat A_1 echt kleinere Ordnung als A und läßt $C_G(x)$ invariant, da A abelsch ist. Gilt daher $C_G(x) \neq 1$, so läßt A_1 per Induktion in $C_G(x)$ einen zyklischen Normalteiler invariant, der natürlich auch von x normalisiert wird. Operiert aber x fixpunktfrei auf G , so invertiert x jedes Element von G und läßt jede Untergruppe von G invariant, insbesondere die per Induktion existierende A_1 -invariante zyklische Untergruppe von G .

(5.2) Lemma: Sei G eine nilpotente Gruppe, A eine elementarabelsche 2-Gruppe, die auf G operiert. Dann besitzt G einen maximalen abelschen Normalteiler, der A -invariant ist.

Beweis: Der Beweis verläuft genau wie derjenige von (3.2), man benutze lediglich (5.1) anstelle von (3.1)

(5.3) Satz: Sei G eine 2-Gruppe, A eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4, die auf G operiert, und sei N ein A -invarianter Normalteiler von G . Besitzt N die Auflösbarkeitslänge n , so gilt:

$$|C_{G/N}(A)| \leq |C_G(A)|^{2^n}.$$

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zur Aussage des Satzes, gelte die Aussage also für G nicht, wohl aber für jeden echten Abschnitt von G , auf dem A operiert. Dann folgt $G/N = C_{G/N}(A)$. Da N von A normalisiert wird, ist auch N' A -invariant, und falls $N' \neq 1$ gilt, also G/N' ein echter Abschnitt von G ist, gilt für die Untergruppe C von G , die durch $C/N' = C_{G/N'}(A)$ definiert sei: $|G/N| \leq |C/N'|^2$. Die Untergruppe C

ist eine echte Untergruppe von G , denn falls $C = G$ gilt, wähle man eine maximale Untergruppe U von G , die N enthält. Diese ist dann A -invariant und A zentralisiert die Faktorgruppe U/N' . Da N/N' stets mindestens Ordnung 4 hat, falls $N' \neq 1$, gilt

$|G/N| \leq |U/N'| \leq |C_U(A)|^{2^{n-1}} \leq |C_G(A)|^{2^{n-1}}$, da N' nur noch Auflösbarkeitslänge $n-1$ hat, und dies widerspricht der Wahl von G als minimales Gegenbeispiel. Für die echte Untergruppe folgt dann aber analog $|C/N'| \leq |C_G(A)|^{2^{n-1}} = |C_G(A)|^{2^{n-1}}$ und wir erhalten $|G/N| \leq |C/N'|^2 \leq (|C_G(A)|^{2^{n-1}})^2$, was wieder der Wahl von G widerspricht. Daher ist $N' = 1$.

Sei $A = \{1, x, y, xy\}$. Dann definieren wir durch $g \longrightarrow g^{-1}g^x$ für alle $g \in G$ eine Abbildung φ_x von G nach N , und in gleicher Weise auch die Abbildungen φ_y und φ_{xy} . Die von den Bildmengen der Abbildungen erzeugten Untergruppen von N seien mit $[G, x]$, $[G, y]$ und $[G, xy]$ bezeichnet. Wir nehmen an, eine dieser Untergruppen, etwa $[G, x]$, sei eine echte Untergruppe von N . Da $[G, x]$ ein A -invarianter Normalteiler von G ist, können wir einen A -invarianten Normalteiler M von G so finden, daß $[G, x] \leq M \leq N$ gilt, und die Fak-

torgruppe N/M Ordnung 2 besitzt. Die von φ_y induzierte Abbildung von G nach N/M ist dann ein Homomorphismus, da N/M ein zentraler Abschnitt von G ist, und der Kern dieses Homomorphismus hat höchstens Index 2 in G . Sei H eine N enthaltende, maximale Untergruppe von G , die in diesem Kern liegt, dann ist wegen der Kommutativität von A die Gruppe H ein A -invarianter Normalteiler von G , und A zentralisiert die Faktorgruppe H/M . Da die Auflösbarkeitslänge von M natürlich nur 0 oder 1 sein kann, gilt:

$$|G/N| = |H/M| \leq |C_H(A)|^2 \leq |C_G(A)|^2,$$

was wieder der Wahl von G widerspricht.

Daher gilt $N = [G, x] = [G, y] = [G, xy]$, und N wird wegen $N' = 1$ von x , y , und xy elementweise invertiert. Das ist aber nur möglich, wenn N vom Exponenten 2 ist, und daher liegt N im Zentralisator von A .

Es gilt $|G : C_G(x)| \leq |N|$, und $|C_G(x) : C_G(A)| \leq |N|$ nach (1.11), und daher $|G : C_G(A)| \leq |N|^2$. Wegen $N \leq C_G(A)$ folgt nun also doch $|G : N| \leq |C_G(A)|^2$, ein letzter Widerspruch, der die Behauptung beweist.

(5.4) Bemerkung: Sind die Ordnungen von G und A teilerfremd, so überdeckt $C_G(A)$ nach ([10], I.8.6) jeden von A zentralisierten Abschnitt von G , es gilt also sogar

$$|C_{G/N}(A)| \leq |C_G(A)|.$$

(5.5) Hilfssatz: Sei P eine abelsche p -Gruppe, $p > 2$, und sei $A = \langle x, y \rangle$ eine zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Gruppe, die auf P folgendermaßen operiert: $[P, x] = 1$, $[P, y] = P$. Operiere das semidirekte Produkt PA irreduzibel auf der elementarabelschen r -Gruppe E . Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (1) $[E, P] = 1$,
- (2) $|E| = |C_E(A)|^2$,
- (3) $[E, x] = E$, und y, xy operieren nichttrivial auf E .

Beweis: $[E, P]$, $C_E(P)$, $[E, x]$ und $C_E(x)$ sind PA -invariante Untergruppen von E , wegen der Irreduzibilitätsbedingung also gleich 1 oder E . Gilt daher nicht (1), aber $[E, x] = 1$, so folgt (2) aus (3.4). Operiert y oder xy trivial auf E' , so auch P , und (1) gilt.

(5.6) Hilfssatz: Sei E eine extraspezielle p -Gruppe, $p > 2$, und sei $A = \langle x, y \rangle \leq \text{Aut}(E)$ isomorph zur Kleinschen Vierergruppe, so daß $[Z(E), A] = 1$, $[E, y] = E$. Dann gilt: $E = C_E(x) \cap C_E(xy)$, wo beide Faktoren extraspezielle p -Gruppen sind, die A -invariant sind und über $Z(E)$ vereinigt sind.

Beweis: Offenbar invertiert y die Faktorgruppe $\bar{E} = E/Z(E)$ elementweise. Sei $\bar{E} = [\bar{E}, x] + C_{\bar{E}}(x)$. Dann ist die Zerlegung nichttrivial, da sowohl x als auch xy nach ([4], 5.4.4) nichttrivial auf $\bar{E}$ operieren müssen. Und $[\bar{E}, x] = C_{\bar{E}}(xy)$, $C_{\bar{E}}(x) = [\bar{E}, xy]$. Nach (1.12) gilt daher $E = C_E(x) C_E(xy)$ und $C_E(x) \cap C_E(xy) = Z(E)$. Seien $w \in C_E(x)$, $v \in C_E(xy)$ beliebig. Dann gilt $[w, v] = [w, v]^x = [w^x, v^x] = [w, v^{-1}z]$ für ein $z \in Z(E)$, und daher $[w, v] = [w, v^{-1}] = [w, v]^{-1}$, woraus $[w, v] = 1$ folgt. Daher ist E das zentrale Produkt der beiden Zentralisatoren, und $Z(C_E(x)) = Z(E)$. Also ist $C_E(x)$ extraspeziell, genauso auch $C_E(xy)$, und die Behauptung folgt.

(5.7) Hilfssatz: Sei R eine elementarabelsche 2-Gruppe, A eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung 2^n , die auf R operiert. Dann gilt:

$$|R| \leq |C_R(A)|^{2^n}.$$

Beweis: Induktion. Für $n = 1$ sei $A = \langle x \rangle$. Dann gilt $1 = [v, x^2] = [v, x]^2 [v, x, x] = [v, x, x]$ für alle $v \in R$, und somit ist der Endomorphismus $\varphi_x: v \mapsto [v, x]$ nilpotent mit $\text{im } \varphi_x \subseteq \ker \varphi_x$. Daraus folgt $|R| = |\text{im } \varphi_x| |\ker \varphi_x| \leq |\ker \varphi_x|^2 = |C_R(x)|^2$.

Sei daher $n \geq 1$, und sei A_1 eine maximale Untergruppe von A . Dann gilt von A_1 nach (5.7) $|A_1| \leq |C_R(A_1)|^{2^{n-1}}$, und auf $C_R(A_1)$ operiert wegen $A' = 1$ die Faktorgruppe A/A_1 der Ordnung 2. Somit erhalten wir $|C_R(A_1)| \leq |C_{C_R(A_1)}(A/A_1)|^2$, und wegen $C_R(A) = C_{C_R(A_1)}(A/A_1)$ folgt die Behauptung.

(5.8) Bemerkung: Gans analog wie in (5.7) beweist man auch für ungerade Primzahlen p die Aussage:

Operiert die elementarabelsche p -Gruppe A auf der elementarabelschen p -Gruppe R , so gilt $|R| \leq |C_R(A)|^{|A|}$.

(5.9) Lemma: Sei R eine extraspezielle p -Gruppe und $A = \langle x, y \rangle$ eine zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Automorphismengruppe von R , so daß $[x, y] = 1$, $[x, x] = 1$, $[y, y] = 1$ gilt. Operiert das semidirekte Produkt EA treu und irreduzibel auf der elementarabelschen r -Gruppe R . Dann gilt $|R| \leq |C_R(A)|^9$.

Beweis: Wegen $[E, y] = E$ ist $p \neq 2$, und falls $r = 2$, so folgt die Behauptung aus (5.7). Sei also $p \geq 3$, $r \geq 3$.

Seien $N_1 := \langle C_E(xy), x \rangle$ und $N_2 := \langle C_E(x), xy \rangle$. Dann sind N_1, N_2 Normalteiler von EA , die $Z(E)$ enthalten. Da x aber die Faktorgruppe $C_E(xy)/Z(E)$, sowie xy die Faktorgruppe $C_E(x)/Z(E)$ elementweise invertiert, ist $Z(E)$ eindeutiger minimaler Normalteiler von EA , N_1 und N_2 . Wegen der Treue und Irreduzibilität des EA -Moduls R gilt $p \neq r$ und $Z(E) = Z(EA)$ operiert fixpunktfrei auf R , nach (1.12) also sogar fixpunktfrei auf jedem von $Z(E)$ normalisierten Abschnitt von R . Daher operieren auch N_1 und N_2 jeweils treu auf von ihnen normalisierten Abschnitten von R , und mit (3.8) gilt für jeden Kompositionsfaktor S des N_1 -Moduls R :

$$|S| \leq |C_S(x)|^3, \text{ analog } |T| \leq |C_T(xy)|^3 \text{ für jeden}$$

Kompositionsfaktor T des N_2 -Moduls R . Mit (1.12) folgt

$$|R| \leq |C_R(x)|^3 \text{ und da } C_R(x) \text{ wegen } N_2 \subseteq C_{EA}(x) \text{ auch}$$

N_2 -invariant ist, können wir eine N_2 -Kompositionsreihe von R durch $C_R(x)$ legen, wieder mit (1.12) folgt:

$$|C_R(x)| \leq |C_{C_R(x)}(xy)|^3. \text{ Wegen } C_R(A) = C_{C_R(x)}(xy) \text{ er-}$$

halten wir schließlich: $|R| \leq |C_R(A)|^9.$

(5.10) Lemma: Sei P eine abelsche p -Gruppe, $p > 2$, auf der die Kleinsche Vierergruppe $A = \langle x, y \rangle$ so operiert, daß $[P, x] = P$, $[P, y] = 1$ gilt. Operiere das semidirekte Produkt PA auf der r -Gruppe R , $r > 2$ prim, mit den folgenden Eigenschaften:

R ist vom Exponenten r und besitzt Klasse 1 oder 2, R besitzt einen echten Normalteiler N , der PA -invariant ist, und für den $N \subseteq Z(R)$, $C_R(P) \subseteq N$ und $[\bar{R}, y] = \bar{R}$ für $\bar{R} = R/N$ gilt.

Sei V ein irreduzibler RPA -Modul in Charakteristik q , $q \nmid \{2, p, r\}$ prim, über einem Zerfällungskörper für RPA . Gelte $C_R(V) \subseteq N$. Dann gilt $|V| = |C_V(A)|^9$.

Beweis: Sei $C := C_R(V)$. Sei zuerst V ein R -homogener Modul. Dann operiert $Z(R/C)$ durch skalare Multiplikationen auf V , ist zyklisch und vertauscht elementweise mit PA . Mit (1.12) folgt $Z(R/C) \subseteq N/C$, und wegen $N \subseteq Z(R)$ sogar $N/C = Z(R/C)$. Da R/N abelsch ist, folgt $N/C = (R/C)'$ und R/C ist extraspeziell. N/C operiert fixpunktfrei auf V und jedem von N normalisierten Abschnitt von V . x operiert nichttrivial auf R/N , da P nichttrivial auf R/N operiert, und dasselbe gilt für xy , daher ist N/C der eindeutige minimale Normalteiler des semidirekten Produktes $A R/C$, und $A R/C$ operiert treu auf jedem $A R/C$ -invarianten

Abschnitt von V . Auf die Faktoren einer $A/R/C$ -Kompositionsreihe von V angewandt liefert (5.9) in Verbindung mit (1.12) das Gewünschte.

Sei daher $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ eine Zerlegung von V in R -homogene Komponenten, und gelte $n > 1$. Die Gruppe PA permutiert die Komponenten V_i transitiv, und wir sind mit (1.7) und (3.5) fertig, falls A bei dieser Permutationsdarstellung treu dargestellt wird. Sei Ω die Menge der V_i .

Gelte: y läßt alle V_i fest.

Dann kann weder x noch xy wegen $[P, x] = P$ und $n > 1$ alle V_i festlassen, und es gilt mit (1.7) $|\Omega| \leq 3 s_n(x)$.

Gelte: x oder xy läßt alle V_i fest. Dann auch ganz P , und es gilt $n = 2$, $|\Omega| = 2 s_n(y)$.

Im ersten Fall operiert y nichttrivial auf der Faktorgruppe $R/C_R(V_i)$ für alle i , denn falls $[R, y] \leq C_R(V_1)$, so $[R, y] \leq C_R(V_i)$ für alle i , da die V_i unter $C_{PA}(y)$ konjugiert sind, und $[R, y] \leq \bigcap_{i=1}^n C_R(V_i) = C \leq N$, ein Widerspruch. Daher operiert $\langle y, R/C_R(V_i) \rangle$ treu auf V_i , und mit (3.6) ergibt (3.8) auf jedem Kompositionsfaktor S die Abschätzung $|S| \leq |C_S(y)|^3$. Mit (1.12) folgt dann wieder $|V_1| \leq |C_{V_1}(y)|^3$.

Im zweiten Fall kann x nicht trivial auf einem $R/C_R(V_i)$ operieren, da nun die V_i unter $C_{PA}(x)$ konjugiert sind. Analog folgt $|V_i| \leq |C_{V_i}(x)|^3$.

Im ersten Fall gilt nun aber $|V| \leq |C_V(y)|^3$, und x permutiert die Komponenten der Zerlegung

$$C_V(y) = C_{V_1}(y) + \dots + C_{V_n}(y) \quad \text{in gleicher Weise}$$

wie die Elemente von Ω . Daher gilt mit (3.5)

$$|C_V(y)| \leq |C_V(A)|^3, \text{ und die Behauptung folgt.}$$

Im zweiten Fall gilt $|V| \leq |C_V(x)|^3$, und analog

$$|C_V(x)| \leq |C_V(y) \wedge C_V(x)|^2 = |C_V(A)|^2, \text{ und es folgt}$$

$$|V| \leq |C_V(A)|^6 \leq |C_V(A)|^9, \text{ gleichfalls die Behauptung.}$$

(5.11) Satz: Es existiert eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ derart, daß für eine auflösbare Gruppe G ungerader Ordnung mit einer Gruppe $A = \langle x, y \rangle$ von Automorphismen isomorph zur Kleinschen Vierergruppe, aus $|C_G(A)| = m$ folgt: $|G : F_2(G)| \leq f(m)$.

Beweis: Da $F_3(G)/F_2(G)$ in $G/F_2(G)$ selbstzentralisierend ist, genügt es offenbar, mit einer Funktion f' die Ordnung von $F_3(G)/F_2(G)$ abzuschätzen. Daher kann $G/F_2(G)$ als nilpotent angenommen werden. Analog können wir uns mit (5.2) darauf beschränken, den Satz für Gruppen G zu beweisen, für die $G/F_2(G)$ abelsch ist, und auch die Annahme, daß A fixpunktfrei auf $G/F_2(G)$ operiert, bedeutet nach (5.4) keine Einschränkung. Nun gilt aber nach ([4], 10.5.4) für die Faktorgruppe $\bar{G} = G/F_2(G)$, daß $\bar{G} = C_{\bar{G}}(x) C_{\bar{G}}(y) C_{\bar{G}}(xy)$, und daher werden wir im Folgenden nur Gruppen G betrachten, für die $G/F_2(G)$ von x elementweise invertiert, von y aber zentralisiert wird. Wie in § 4 können wir zusätzlich noch annehmen, daß $F(G)$ direktes Produkt minimaler Normalteiler von G , nach dem Satz von Maschke auch von GA ist.

Nach ([4], 5.3 (3)) existiert in jeder p -Sylowgruppe P von $F_2(G)/F(G)$ eine kritische Untergruppe C_p , die charakteristisch in $G/F(G)$ und von Klasse kleiner gleich 2 ist, mit der Eigenschaft, daß jeder nichttri-

viale p' -Automorphismus von P einen nichttrivialen Automorphismus von C_p induziert. Die Ordnung der Gruppe $G/F_2(G)$ kann daher wie folgt durch das Produkt der Ordnungen der Automorphismengruppen der C_n für alle Primteiler von $|F_2(G)/F(G)|$ abgeschätzt werden. Jede p' -Gruppe aus $G/F_2(G)$ operiert auf der p -Sylowgruppe von $F_2(G)/F(G)$, und daher auf C_p . Betten wir $G/F_2(G)$ in das direkte Produkt seiner p -Komplemente über die Primteiler p von $|F_2(G)/F(G)|$ ein, und bilden dieses direkte Produkt nach dem direkten Produkt der Automorphismengruppen der C_p ab, und zwar komponentenweise mit dem Operationshomomorphismus, dann zentralisiert ein Element der Ordnung q aus dem Kern des zusammengesetzten Homomorphismus φ die kritischen Untergruppen aller q' -Sylowgruppen von $F_2(G)/F(G)$, also das ganze q -Komplement von $F_2(G)/F(G)$. Das widerspricht aber (1.3). Also haben wir $G/F_2(G)$ in das direkte Produkt der $\text{Aut}(C_p)$ eingebettet, und können seine Ordnung durch das Produkt der $|\text{Aut}(C_p)|$ abschätzen. Offenbar reicht zu einer Abschätzung schon die Ordnung von $\text{im } \varphi$, und dafür braucht man nur die Ordnungen der $[C_p, \bar{Q}] / \langle C_p, \bar{Q} \rangle$ abzuschätzen, für alle Primteiler p von $|F_2(G)/F(G)|$, $\bar{Q}$ sei das normale p -Komplement von $G/F_2(G)$.

Setze $\widetilde{C}_p := [C_p, Q]$, wie eben definiert, und fasse die Primteiler von $|F_2(G)/F(G)|$ zu einer Primzahlmenge J zusammen. Die Teilmenge von Elementen aus J , die auch $|C_G(A)|$ teilen, sei J_2 , die Differenzmenge sei J_1 .

Wir werden die Ordnungen der Faktorgruppen $\widetilde{C}_p / \phi(C_p)$ nach $\phi(C_p)$ für jedes $p \in J_2$ durch eine Funktion von $|C_G(A)|$ abschätzen. Da die Mächtigkeit von J_2 auch durch eine Funktion von $|C_G(A)|$ beschränkt ist, ist das Produkt der Ordnungen wieder durch eine Funktion von $|C_G(A)|$ beschränkt. Die Mächtigkeit der Menge J_1 haben wir nicht so leicht im Griff, wir setzen $C := \prod_{p \in J_1} C_p$. Offenbar ist C ein Normalteiler von $GA/F(G)$. Wir haben $D := \prod_{p \in J_1} \widetilde{C}_p / \phi(C_p)$ durch eine Funktion von $|C_G(A)|$ zu beschränken. Dazu nutzen wir aus, daß $G/F(G)$ treu auf $F(G)$ operiert. Wir gehen bis auf weiteres von GA über zu $GA/F(G)$ und umgekehrt, ohne pedantisch zwischen Untergruppen und Abschnitten zu unterscheiden, zumindest in der Notation. Irreduzible GA -Untermoduln von $F(G)$ sind über einem endlichen Primkörper. Wir werden sie mittels (1.10) aber stets als über hinreichend großen Körpern annehmen, wenn es nur um Abschätzungen $|M| \leq |C_M(A)|^f$ geht.

Wir werden D abschätzen, indem wir alle GA-irreduziblen Untermoduln K von $F(G)$, für die D nicht durch $C_C(K)$ überdeckt wird, entweder selbst durch $\{C_K(A)\}^9$ abschätzen, oder einen Untermodul L von K , der alle für D "nichttrivialen" C -Untermoduln enthält, auf die gleiche Weise abschätzen.

Sei M ein derartiger GA-irreduzierbarer Untermodul von $F(G)$. Zerlege M in die direkte Summe C -homogener Komponenten M_i , $1 \leq i \leq n$, und sei $n > 1$.

Sei $S := \bigcap_{i=1}^n N_{GA}(M_i) \triangleleft GA$. Dann gilt für $A \in S = 1$ die Abschätzung $|M| \leq \{C_M(A)\}^9$ wegen (1.7) und (3.5).

Gelte $A \in S = \langle x \rangle$. Dann operiert x auf allen Faktorgruppen $C/C_C(M_i)$. Wir zeigen, daß die Operation von x auf $C/C_C(M_i)$ nichttrivial ist, falls D nicht von $C_C(M_i)$ überdeckt wird. Dann kann y die Komponente M_i nämlich nicht auch festlassen, sonst zentralisiert A $Z(C/C_C(M_i)) \neq 1$ im Widerspruch zur fixpunktfreien Aktion von A auf C , und $|M_i + M_i^y| \leq \{C_{M_i+M_i^y}(A)\}^6$ nach (3.8). Sei also M_i derart, daß für $p \in J_1$ gilt

$\widetilde{C}_p = [C_p, \overline{Q}] \neq \phi(C_p)C_C(M_i)$. Hierbei ist $\overline{Q}$ das p -Komplement von $G/F_2(G)$ und falls Q eine A -invariante p' -Halluntergruppe von $G/F(G)$ ist, so gilt $\widetilde{C}_p = [C_p, [Q, x]]$. Wegen $x \in S$ liegt nun auch $[Q, x]$ in S , und $[Q, x]$ läßt $C_C(M_i)$ invariant. Würde nun x die Gruppe $C/C_C(M_i)$

zentralisieren, so auch die nach Annahme nichttriviale Faktorgruppe $[Q, x]/C_{[Q, x]}(G/C_G(M_1))$, ein Widerspruch.

Gilt $A \triangleleft S = \langle xy \rangle$, so kann der obige Beweis mit x und xy vertauscht wörtlich übernommen werden.

Gelte $A \triangleleft S = \langle y \rangle$. Und sei M_1 , $\widetilde{C}_p = [C_p, [Q, x]]$ wie oben. Operiert y nichttrivial auf $C/C_G(M_1)$, so brauchen wir im obenstehenden Beweis nur die Rollen von x und y zu vertauschen, um $|M_1 + M_1^x| \leq |C_{M_1+M_1^x}(A)|^6$ zu erhalten.

Das Element y invertiert aber wegen der fixpunktfreien Operation von A auf C die Gruppe $\widetilde{C}_p \phi(C_p)/\phi(C_p)$, und kann daher nach Annahme nicht ganz $C/C_G(M_1)$ zentralisieren.

Die Unmöglichkeit von $A \triangleleft S$ wurde bereits oben gezeigt, $A \triangleleft S$ würde der fixpunktfreien Operation von A auf C widersprechen. Das erledigt auch den Fall $n = 1$.

Sei schließlich $\widetilde{C}_p = [C_p, [Q, x]]$ für $p \in J_2$ betrachtet. Wir haben $E = \widetilde{C}_p \phi(C_p)/\phi(C_p)$ zu beschränken. E wird unter y in $C_E(y) + [E, y]$ zerlegt, und diese Zerlegung wird von $\langle [Q, x], x \rangle$ respektiert. Da wir daher $|C_E(y)|$ durch $|C_E(A)|^3$ nach (3.8) abschätzen können, sei ohne Einschränkung E von y invertiert.

Das Produkt $H := \widetilde{C}_p \Phi(C_p)[Q, x]A$ operiert nun aber nach (1.3) treu auf $O_p(F(G))$, und wir haben die Ordnungen der für E "nichttrivialen" p' -Faktoren einer H -Kompositionsreihe durch eine Funktion der Anzahl der A -Fixpunkte darauf abzuschätzen. Für jeden solchen irreduziblen H -Modul M erfüllt aber $H/C_p \Phi(C_p)^{(M)}$ die Voraussetzungen von (5.10), welches die gewünschte Abschätzung liefert. Offenbar ist für die Anwendung von (5.10) unerheblich, ob $[Q, x]_{\wedge F_2(G)} = 1$ gilt, also die Gruppe P aus (5.10) selbst die angegebenen Eigenschaften hat, oder ob P nur auflösbar ist und eine nichttriviale Faktorgruppe mit diesen Eigenschaften besitzt.

(5.12) Bemerkung: Es existiert eine numerische Funktion $f(m, n)$ mit der Eigenschaft, daß wenn G eine auflösbare Gruppe ist, die eine zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Gruppe A von Automorphismen besitzt, die Ordnung der Faktorgruppe $G/F_2(G)$ durch $f(m, n)$ abgeschätzt werden kann, wenn $|C_G(A)| = m$, und eine 2-Sylowgruppe von G Auflösbarkeitslänge n besitzt.

Beweis: Wie in (3.14) wird zuerst $|G/O_{2,2}(G)|$ auf der Frattini-Faktorgruppe von $O_{2,2}(G)/O_2(G)$ abge-

schätzt. Hierbei benutzen wir (5.3) und (5.7), und die Funktion f_1 hängt tatsächlich von n ab. Nun wird $\left| O_{2,2}(G)F_2(G)/F_2(G) \right| = \left| O_{2,2}(G)/F_2(O_{2,2}(G)) \right|$ abgeschätzt, und dazu können wir offenbar $G = O_{2,2}(G)$ annehmen. Mittels (1.3) wird dieser 2-nilpotente Fall auf (5.11) zurückgespielt. Sei S eine A -invariante 2-Sylowgruppe von G , wir haben $S/C_S(F_2(0)/F(0)) = \bar{S}$ zu beschränken, wenn $0 := O_{2,2}(G)$ gesetzt sei. Dazu können wir diese Faktorgruppe wegen (5.2) als abelsch annehmen, und wegen (5.3) zu $[\bar{S}, A] = [\bar{S}, x][\bar{S}, y][\bar{S}, xy]$ übergehen, wo $A = \langle x, y \rangle$. Wir können uns sogar auf $[\bar{S}, x]$ beschränken. Da der Rang von $\bar{S}$ aber nach (5.7) durch eine Funktion von $C_3(A)$ beschränkt ist, sind wir fertig, wenn wir den Exponenten von $\bar{S}$ abschätzen können. Sei dieser Exponent gleich 2^k , und sei ohne Einschränkung k größer als 2. Dann wählen wir einen nichttrivialen Fixpunkt z von A in $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\bar{S})$ und können offenbar die Ordnung einer Untergruppe vom Exponenten 2^k von S , also auch 2^k selbst abschätzen, indem wir die die Ordnungen aller von z nicht zentralisierten, $\bar{S}A$ -irreduziblen Untermoduln von $C_p/\phi(C_p)$ für alle $p \in J$ abschätzen können. Der Beweis, d.h. die Abschätzung durch die Anzahlen der Fixpunkte von A auf C_p und $F(0)$ verläuft mit gewissen Modifikationen parallel zu (5.11), und deshalb will ich eine genaue Durchführung bis zu

dem Zeitpunkt verschieben, wenn (5.3) (vielleicht) von n unabhängig gemacht werden kann, und (5.12) für eine Funktion $f(m)$, die von keinen rein gruppen-internen Parametern abhängt, formuliert werden kann.

(5.13) Bemerkung: Von Hartley stammt eine etwas schwächere Aussage als (5.11), wenn angewandt auf elementar-abelsche Automorphismengruppen der Ordnung 4 von auflösbaren Gruppen ungerader Ordnung. ([8], Cor. S. 4). Da sie jedoch auf einer Anwendung von ([16], Theorem, S. 233) beruht, ist hier wenig Hoffnung, von der Teilerfremdheit $(|G|, |A|) = 1$ einmal wegzukommen.

(5.14) Bemerkung: Wie im Beweis zu (5.12) angedeutet, würde eine Verschärfung von (5.3) zu einer Verschärfung von (5.12) führen. Für die zu (1.13) analoge Situation ist (5.3) jedoch stark genug:

Sei G eine abelsche Gruppe, $A \leq \text{Aut}(G)$ isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. Dann gilt für $H := GA$

$$|H : H'| \leq |A| |Z(H)|^2.$$

Beweis: (5.3).

Literaturverzeichnis:

- [1] N. Blackburn, B. Huppert: Finite Groups II.,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York,
erscheint demnächst

- [2] M. Collins, B. Rickman: Finite groups admitting an
automorphism with two fixed points
Journal of Algebra 49 (1977), S.547-563

- [3] P. Fong: On orders of finite groups and centralizers
of p-elements
Osaka J. Math. 13 (1976), S.483-489

- [4] D. Gorenstein: Finite Groups
Harper and Row, New York, 1968

- [5] P. Hall, G. Higman: On the p-length of p-soluble groups
and reduction theorems for the Burnside problem
Proc. London Math. Soc. 6 (3) (1956), S.1-42

- [6] B. Hartley: Some theorems of Hall-Higman type for
small primes
Proc. London Math. Soc. (3), erscheint demnächst

- [7] B. Hartley, Th. Meixner: Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order Manuskript, 1978
- [8] B. Hartley, Th. Meixner: Finite soluble groups in which the centralizer of an element of prime order is restricted Manuskript, 1978
- [9] G. Higman: Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed elements
J. London Math. Soc. 32 (1958), S.321-334
- [10] B. Huppert: Endliche Gruppen I.
Springer-Verlag, Berlin, 1967
- [11] A. Kostrikin, V. Kreknin: Lie algebras with a regular automorphism
Sov. Math. Doklady 4 (1963), S.355-357
- [12] V. Kreknin: Solvability of Lie algebras with a regular automorphism of finite period
Sov. Math. Doklady 4 (1963), S.683-685

- [13] H. Kurzweil: Endliche Gruppen
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977
- [14] H. Meier-Wunderli: Metabelsche Gruppen
Comment. Math. Helvet. 25 (1951), S.1-10
- [15] J.P. Serre: A Course in Arithmetic
Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1973
- [16] J. Thompson: Automorphisms of solvable groups
Journal of Algebra 1 (1964), S.259-267
- [17] J. Thompson: Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order
Proc. Nat. Acad. Sci. US 45 (1959), S.578-581

Thomas Meixner

Lichtenfels, den 25.9.72

Fliederweg 12

8620 Lichtenfels

L E B E N S L A U F

Am 22.3.1952 wurde ich als zweites Kind des Verwaltungsangestellten Willy Meixner in Lichtenfels geboren. Ich besuchte die Evangelische Volksschule Lichtenfels, sowie das Meranier-Gymnasium Lichtenfels, an dem ich im Juni 1971 die Reifeprüfung ablegte.

Vom 1.7.1971 bis zum 31.12.1972 leistete ich den Wehrdienst in der Bundeswehr in Bayreuth und Ebern ab.

Im Wintersemester 1972/73 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen. Im Sommer 1977 legte ich die Diplomprüfung im Fach Mathematik, im Herbst 1977 die Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien in der Fächerverbindung Mathematik/Physik in Erlangen ab. Das Studienjahr 1977/78 verbrachte ich an der University of Manchester in Manchester, Großbritannien. Seit dem 16.10.1978 bin ich als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Erlangen beschäftigt.

